Descriptif des enseignements de la Classe Préparatoire Universitaire Mathématiques – Physique – Informatique de l'Université de Lorraine.

Présentation de la formation :

La Classe Préparatoire Universitaire Mathématiques - Physique - Informatique de l'Université de Lorraine est une formation sélective complémentaire à la Licence de Mathématiques. Elle propose chaque semestre entre 120 et 150 heures de compléments de mathématiques, physique, informatique, français et anglais aux 300 heures de la licence. Elle a deux objectifs principaux :

- permettre à de bons étudiants de trouver à la Faculté des Sciences et Technologies un cursus post-bac exigeant et renforcé, supposant des prérequis et un engagement spécifique dans les études,
- leur offrir une préparation à des concours d'intégration dans des Écoles d'Ingénieur.

Descriptif succinct du contenu de la deuxième année de formation :

Semestre 3 : anglais 25h, mathématiques 279h, informatique 56h, physique 60h.

- **Langues – PPP (24h + 5h Compléments d'Anglais 3)**
- **Analyse 2 (99 h)**
- **Algèbre linéaire 2 (78 h)**
- **Algèbre 1 (72 h)**
- **Méthodes Numériques (30 h)**
- **Compléments d'informatique 3 (56 h)**
- **Physique ondes et vibrations (30 h)**
- **Compléments de Physique 3 (30 h)**

Semestre 4 : anglais 25h, mathématiques 292h, informatique 20h, physique 20h, français 25h.

- **Langues – Transverse (29h + 5h Compléments d'Anglais 3)**
- **Analyse 3 (96 h)**
- **Algèbre bilinéaire (60 h)**
- **Probabilités (60 h)**
- **Géométrie Affine et Euclidienne (36h)**

- **Synthèse mathématique (40 h)**
- **Mathématiques discrètes (20 h)**
- **Compléments de Physique 4 (20 h)**
- **Français (25 h)**

Descriptif détaillé du contenu de la deuxième année de formation :

Semestre 3 :

- **UE301 Analyse 2 (90h + 21h compléments d'Analyse 2) :**

Séries de nombres réels ou complexes : Séries à termes positifs, emploi des relations de comparaison. Règle de Cauchy et d'Alembert. Séries de Riemann. Critère des séries alternées. Séries absolument convergentes, semi-convergentes. La convergence implique que le terme général tend vers 0. Familles sommables.

Les séries de Bertrand, la transformation et le critère d'Abel pourront être vus en exercice.

Suites de fonctions : Convergence simple, uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Une limite uniforme de fonctions continues est continue. Théorème de la double limite pour les suites de fonctions convergeant uniformément. Théorèmes analogues pour la dérivation des suites de fonctions.

Séries de fonctions : Convergence simple et uniforme d'une série. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Convergence normale des séries. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point. Continuité et dérivabilité de la somme d'une série de fonctions. Approfondissement de la notion de convergence uniforme, critère de Cauchy pour les séries de fonctions.

Séries entières : Séries entières de la variable complexe. Rayon de convergence, disque de convergence. Convergence normale à l'intérieur (Lemme d'Abel) et divergence grossière à l'extérieur. Règle de d'Alembert. Somme et produit de Cauchy de séries entières. Continuité sur le disque de convergence. Dérivation terme à terme d'une série entière d'une variable réelle. Primitivation. Lien entre coefficients et les dérivées successives en 0. Définition de exp z, cos z et sin z pour z complexe, formules de trigonométrie. Développement en série entière d'une fonction et application à la recherche de solutions d'équations différentielles.

Intégration. Fonction uniformément continues. Théorème de Heine sur un segment. Fonctions continues par morceaux sur un segment. Fonctions réglées. Fonctions continues par morceaux. Les fonctions continues par morceaux sont réglées. Présentation de l'intégrale de Cauchy (c'est-à-dire intégration des fonctions réglées [limites uniformes de fonctions en escalier]). Linéarité et positivité de l'intégrale. Relation de Chasles. La valeur absolue de l'intégrale est plus petite que l'intégrale de la valeur absolue. Primitives, théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. Intégration par parties, changement de variables. Formules de Taylor (Taylor-Young, Taylor reste intégral). Intégration des fractions rationnelles. Inégalités de la moyenne

Échange limite (ou somme) et intégrale pour les suites (ou séries) convergeant uniformément sur tout segment.

On pourra présenter l'intégrale de Cauchy d'abord pour les fonctions continues puis l'étendre aux fonctions réglées. Le théorème de convergence dominée est au programme de l'UE Intégration et probabilités.

Intégrales impropres : Critère de Cauchy, convergence absolue. Intégrales de fonctions positives, emploi des relations de comparaison. Comparaison d'une intégrale impropre et d'une série. Intégrales semi- convergentes. Intégration des relations de comparaison.

Complément CPU : Continuité et dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre. Ersatz de convergence dominée pour l'intégration des suites et des séries de fonctions.

- **UE302 Algèbre linéaire 2 (66h + 12h compléments d'Algèbre) :**

1) Déterminants :

Permutations : signature et propriétés élémentaires en vue de définir le déterminant.

Applications multilinéaires alternées. Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base. Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice. Opérations sur les lignes et les colonnes. Cofacteurs et comatrices. Calcul du déterminant d'une matrice. Matrices inverses et déterminant. Formules de Cramer. Calcul du rang d'une matrice par le calcul de déterminants de matrices extraites. Exemples apparaissant en TD : calcul de déterminants de taille quelconque par récurrence, déterminant de Vandermonde, calcul de déterminants de matrices triangulaires par blocs.

2) Réduction des endomorphismes :

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres. Endomorphismes et matrices diagonalisables. Calcul des puissances d'une matrice. Trigonalisation et Théorème de Cayley-Hamilton : endomorphismes trigonalisables, polynômes d'endomorphismes, théorème de Cayley-Hamilton. Théorème de décomposition des noyaux, polynômes annulateurs, polynôme minimal. Projecteurs. Indice d'un endomorphisme et endomorphismes nilpotents, sous-espaces caractéristiques et décomposition de Jordan. Exemples traités en cours ou en TD : suites récurrentes.

3) Systèmes différentiels linéaires :

Espaces vectoriels normés. Norme sur l'espace des endomorphismes et sur les matrices. Dérivabilité et intégration des fonctions à variable réelle et à valeurs dans un espace vectoriel. Exponentielle d'une matrice. Résolutions des systèmes différentiels linéaires homogènes et non homogènes. Résolution des équations différentielles linéaires.

- **UE303 Algèbre 1 (60h + 12h compléments d'Algèbre) :**

1) Notions supplémentaires de théorie des ensembles.

Ensemble des parties d'un ensemble. Relations d'équivalence sur un ensemble et partitions. Ensemble quotient.

2) Introduction aux groupes et actions de groupes.

Groupe, sous-groupe, ordre d'un groupe. Exemples. Sous-groupe engendré par une partie, ordre d'un élément. Exemples. Morphisme de groupes. Exemples. Définition de groupe monogène et cyclique. Exemple du groupe des racines n-èmes de l'unité.

Ensemble quotient G/H. Groupe quotient G/H dans le cas commutatif, cas de Z/nZ. Les sous-groupes distingués et les groupes quotient en général, l'étude des ordres des différents éléments dans un groupe cyclique, des générateurs, et des morphismes entre groupes cycliques ne sont pas traités, leur étude est reportée en S5.

Définition d'une action de groupe. Orbites, ensemble quotient, stabilisateur d'un élément.

On se limitera à donner le vocabulaire strictement nécessaire pour traiter l'action naturelle du groupe des permutations et les actions de type géométrique, qui sont les seuls exemples que l'on traitera. Le langage général des actions fidèles, (simplement) transitives, les opérations de G sur lui-même ou sur ses sous-groupes ne sont pas abordés en S3 mais en S5.

3) Permutations.

Groupe Bij(X), action naturelle sur X. Transposition, support d'une permutation. Points fixes, parties stables.

Cas où X est fini. Cycles, permutation respectant une partition.

Toute permutation peut s'écrire comme produit de transposition.

Décomposition canonique d'une permutation en produit de cycles de supports disjoints. Signature.

4) Anneaux, idéaux, corps.

Définitions. Étude de l'anneau et de ses inversibles.

Étude de Z/pZ si p est premier.

Retour sur l'arithmétique de Z et K[X] du point de vue des anneaux et idéaux : les idéaux sont principaux. Théorème des restes chinois.

Les polynômes irréductibles sur Q, les polynômes cyclotomiques, le contenu, le critère d'Eisenstein, ne sont pas traités. Leur étude est reportée en S5.

Exemples d'anneaux traités en TD : anneaux de fonctions, anneau des endomorphismes d'un ev, anneaux de matrices carrées : diagonales, triangulaires...
Exemples de corps traités en TD : Q[sqrt 2], Q(i). On n'étudie pas en détail les extensions finies de Q ni de Z/pZ.

Exemples traités en TD : quelques applications élémentaires de la théorie des espaces vectoriels lorsque le corps de base est différent de R ou C.

- **UE304 Méthodes numériques (30h) :**

L'objectif de cette UE est d'initier les étudiants à l'Analyse Numérique et de leur montrer que les notions parfois abstraites acquises en Analyse et Algèbre Linéaire permettent de résoudre des problèmes concrets.

Détermination de zéros d'une fonction

- Compléments (avec rappels) d'Analyse :
  - suites récurrentes, théorème du point fixe, point fixe attractif, point fixe répulsif.
  - introduction de la notion de vitesse de convergence.
- Algorithmes classiques : méthode de Dichotomie, méthodes de point fixe, méthodes de la corde, de la sécante, de la fausse position et de Newton. Pour chacun de ces

algorithmes, on étudiera les propriétés de convergence et le coût de la méthode. Ces algorithmes seront comparés lors des séances de TP.
- Accélération de convergence : Accélérations d'Aitken et de Steffensen.

Interpolation polynomiale

- Interpolation de Lagrange : Polynôme d’interpolation de Lagrange, forme de Newton du polynôme d’interpolation, Algorithme d’Hoörner, algorithme des différences divisées, cas des nœuds équidistants.
- Notions d'Interpolation d'Hermite et de Splines cubiques.

- **UE321 Physique ondes et vibrations (30h) :**

L'objectif de cette unité d'enseignement est de découvrir la notion d'onde mécanique. Dans un premier temps, les phénomènes vibratoires seront rappelés et approfondis (amortissement, forçage, résonnance). Ensuite la notion d'onde sera introduite, ainsi que l'équation d'onde et sa résolution (onde progressive, onde plane, onde harmonique, onde stationnaire). Les aspects énergétiques seront également étudiés. Certains résultats théoriques seront confrontés à l'expérience. En fin de cours, les milieux dispersifs seront abordés.

- **UE322 Langages – Automates – Graphes et applications (30h + 4h compléments) :**

- Langages Rationnels, Automates Finis et Grammaires Formelles - Arbres, Graphes et algorithmes.
- Applications.

- **UE390 Transverse - Langue (24h + 5h) :**

PPP : module 5 proposé par le SOIP, "préparer son CV et sa lettre de motivation"

- **CPMPI3P Compléments de Physique 3 (30h) :**

Compléments d'électromagnétisme 2

Électromagnétisme dans le vide :

- Équations de Maxwell.
- Potentiels électriques et magnétiques.
- Approximation des régimes quasi-permanents.
- Dipôles électriques et magnétiques.
- Induction.
- Ondes électromagnétiques.
- Énergie électromagnétique.

Induction magnétique :

- Loi de Faraday, loi de Lenz.
- Forme locale de la loi de Faraday : équation de Maxwell-Faraday.

Applications de l’induction :

- Circuit mobile dans un champ uniforme et stationnaire, circuit filiforme rigide dans un champ magnétique variable.
- Flux propre et inductance propre.
- Inductance mutuelle. Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction.

Équations de Maxwell et ondes électromagnétiques :

- Équations de Maxwell dans le vide.
- Équations de propagation des champs dans une région vide de charges et de courants

- **CPMPI3I2 Compléments d'informatique 3 (55h):**

Acquisition d'outils pour l'évaluation de la performance des algorithmes et leur optimisation Algorithmes récursifs ;

Introduction à la complexité en temps, théorème maitre ;

Listes, piles et files ;

Arbres, arbres ordonnés, première approche des arbres ordonnés équilibrés ; Tris, en particulier tri par tas ;

Tables de hachage ;

Listes de priorité.

<u>Semestre 4 :</u>

- **UE401 Analyse 3 (96h) :**

Espaces vectoriels de dimension finie sur R ou C. Normes. Vocabulaire de la topologie générale : ouverts et fermés. Convergence de suites vectorielles. Compacité. Équivalence entre compact et « fermé borné ». Équivalence des normes. Continuité d'une application entre espaces vectoriels normés. Continuité des applications linéaires entre espaces vectoriels normés de dimension finie. Norme d'une application linéaire. Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires.

Fonctions de plusieurs variables. Limite ponctuelle d'une fonction de plusieurs variables. Continuité d'une fonction de plusieurs variables. Caractérisation de la continuité des fonctions vectorielles par la continuité des fonctions coordonnées.

La différence avec la fin du chapitre précédent est l'utilisation de coordonnées.

Calcul différentiel. Différentiabilité pour les applications entre espaces vectoriels normés de dimension finie. Différentielle et dérivées partielles. Dérivée directionnelle. Matrice jacobienne. Applications de classe C^1. Caractérisation par la continuité des dérivées partielles. Propriétés de la différentielle : linéarité, différentielle d'une composée. Différentielles des applications linéaires et bilinéaires. Difféomorphisme.

Cas particulier des fonctions à valeurs réelles. Dérivées partielles d'ordre 2. Théorème de Schwarz. Matrice Hessienne. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Points critiques. Extrema locaux. Caractérisation des extrema locaux et de la convexité à l'aide de la matrice Hessienne. Espaces vectoriels de dimension finie sur R ou C. Normes. Vocabulaire de la topologie générale : ouverts et fermés. Convergence de suites vectorielles. Compacité. Équivalence entre compact et « fermé borné ». Équivalence des normes. Continuité d'une application entre espaces vectoriels normés. Continuité des applications linéaires entre espaces vectoriels normés de dimension finie. Norme d'une application linéaire. Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires.

Fonctions de plusieurs variables. Limite ponctuelle d'une fonction de plusieurs variables. Continuité d'une fonction de plusieurs variables. Caractérisation de la continuité des fonctions vectorielles par la continuité des fonctions coordonnées.

La différence avec la fin du chapitre précédent est l'utilisation de coordonnées.

Calcul différentiel. Différentiabilité pour les applications entre espaces vectoriels normés de dimension finie. Différentielle et dérivées partielles. Dérivée directionnelle. Matrice jacobienne. Applications de classe C^1. Caractérisation par la continuité des dérivées partielles. Propriétés de la différentielle : linéarité, différentielle d'une composée. Différentielle des applications linéaires et bilinéaires. Difféomorphisme.

Cas particulier des fonctions à valeurs réelles. Dérivées partielles d'ordre 2. Théorème de Schwarz. Matrice Hessienne. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Points critiques. Extrema locaux. Caractérisation des extrema locaux et de la convexité à l'aide de la matrice Hessienne.

Le théorème de Schwarz est admis.

Intégrales multiples. Définition de l'intégrale sur un pavé comme intégrale itérée. Théorème de Fubini pour les intégrales multiples. Changement de variables (calculs). Exemple de coordonnées polaires, cylindriques, sphériques.

Le théorème de Schwarz est admis.

Intégrales multiples. Définition de l'intégrale sur un pavé comme intégrale itérée. Théorème de Fubini pour les intégrales multiples. Changement de variables (calculs). Exemple de coordonnées polaires, cylindriques, sphériques.

Le théorème de Fubini est admis et sera démontré dans le cadre de la théorie de l'intégration de Lebesgue dans le cours « intégration et probabilités ».

Intégrales curvilignes. Rappels sur les courbes paramétrées planes. Changement de paramétrages. Intégrale curviligne. Invariance par changement de paramétrage. Longueur d'une courbe paramétrée régulière. Invariance par changement de paramétrage. Paramétrage par longueur d'arc. Formule de Green-Riemann. Courbure d'une courbe birégulière.

- **UE402 Algèbre Bilinéaire (60h) :**

1) Formes linéaires et dualité

Formes linéaires, espace dual, hyperplan, base duale (formule changement de base), base préduale, bidual d'un e.v.

2) Formes binéaires symétriques (fbs) et formes quadratiques (fq)

Fbs, fq, Identités de polarisation. Noyau. Cône isotrope.

Formes positives et définies positives, exemples, inégalité de Cauchy-Schwarz, fbs en dimension finie: matrice d'une fbs, formule de changement de bases, orthogonalité, noyau et rang par rapport à une fq ou fbs, fbs dégénérée, non dégénérée, réduction des formes quadratiques (réduction de Gauss) en dimension 2 puis cas général, théorème d'inertie de Sylvester.

3) Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, orthogonalité, Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, projection orthogonale sur un ss-ev, distance d'un vecteur à un ss-ev, symétrie par rapport à un ss-ev, orientation d'un espace euclidien, produit mixte, produit vectoriel, produit vectoriel en dimension 3.

4) Groupe orthogonal

Mesure d'angles géométriques, isométrie d'un espace euclidien, symétrie orthogonale dans les espaces euclidien (réflexion, demi-tour).

Matrices orthogonales, isométries directes et indirectes, groupe orthogonal en dimensions 2 et 3, réduction des endomorphismes orthogonaux, cas général.

5) Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien

Adjoint. Généralités, matrice de l'adjoint d'un endomorphisme, endomorphismes symétriques, retour à la projection orthogonale et symétrie orthogonale. Endomorphismes symétriques positifs, définies positifs, matrices symétriques positives, définies positives, réduction des endomorphismes symétriques (ou matrices symétriques).

- **UE403 Probabilités (60h) :**

Ensembles dénombrables: un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec N. Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable. Les ensembles N^2, Z et Q sont dénombrables.

L'ensemble des réels n'est pas dénombrable.

Famille sommable de réels positifs indexée par un ensemble dénombrable.

Théorème de sommation par paquets. Application aux séries doubles à termes positifs. Espace de probabilité. Vocabulaire des probabilités. Théorèmes de continuité séquentielle monotone.

Probabilités conditionnelles et indépendance. Famille d'évènements mutuellement indépendants.

Loi d'une variable aléatoire discrète, d'un vecteur discret.

Variables discrètes, vecteurs discrets indépendants. Si X1, X2 , ..., Xn sont des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et n-1, et toutes fonctions f et g, les variables f (X1 , ..., Xm) et g (Xm+1 , ..., Xn) sont indépendantes.

Lois usuelles discrètes: Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson.

Espérance: linéarité, positivité, théorème de transfert.

Variance, covariance, lien avec l'indépendance. Calcul des premiers moments des lois usuelles. Fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières positives. Inégalité de Markov et de Chebitchef.

Loi faible des grands nombres. Application à la détermination d'intervalles de confiance. Exemples simples de chaînes de Markov (on ne développera pas de théorie générale, mais on pourra se familiariser avec le schéma Xn+1=F(Xn,Un+1)).

- **UE404 Géométrie Affine et Euclidienne (36h) :**

1) Introduction à la géométrie affine.

Espaces et applications affines. Barycentres. Enveloppes convexes.

Translations et homothéties du plan, symétries centrales. Étude du groupe des homothéties- translations du plan. Projection du plan sur une droite parallèlement à une autre droite. Théorèmes de Thalès et de Pappus.

2) Compléments de géométrie euclidienne plane.

Groupe orthogonal du plan. Angles orientés de vecteurs et leurs mesures.

Rappels sur les transformations géométriques classiques du plan affine euclidien: rotations, réflexions orthogonales, similitudes directes et indirectes.

Constructions à la règle et au compas : Construction de parallèles, de milieux; construction d'images de points par des homothétie de rapport rationnel, rotations, similitudes. La théorie générale des nombres constructibles est traitée en L3.

Rappels sur les relations métriques dans le triangle.

Angles orientés de droites. Théorème de l'angle au centre et de l'angle inscrit. Cocyclicité, quadrilatères inscriptibles.

3) Compléments sur les nombres complexes.

Interprétation de Re(\bar a.b) et Im(\bar a.b). Affixes de barycentres. Angles, distances, aires, équations de droites et cercles, lieux géométriques. Rappels sur les similitudes. Polygones réguliers. Birapport.

4) Groupes d'isométries affines de sous-ensembles du plan : triangles, quadrilatères, polygones réguliers. Si le temps le permet, on pourra aborder au choix les groupes de frises et de pavages, ou bien les groupes de polyèdres réguliers dans l'espace.

Les 6h de TP pourront être l'occasion d'utiliser geogebra ou un logiciel équivalent pour revenir sur la notion de construction à la règle et au compas, les points et droites remarquables d'un triangle, des problèmes de minimisation de distances ou d'aires, ou sur les lieux géométriques en exploitant les capacités d'animation du logiciel.

- **UE405 Libre (27h) :**

À choisir parmi une liste d'UE hors de la discipline.

- **UE490 Transverse (29h + 5h) : dont 25 h anglais**

L'étudiant se familiarisera avec la production de documents scientifiques à l'aide du logiciel Latex

- **CPMPI4M Synthèse mathématique (40h) :**

- Préparation des concours, préparation à l'écrit, synthèse.

- Séries de Fourier, convergence ponctuelle (théorème de Dirichlet) et en moyenne quadratique (théorème de Parseval).

- **CPMPI4P Compléments de physique 4 (20h) :**

Optique physique

- Nature ondulatoire de la lumière. Description qualitative de la diffraction.
- Rôle de la diffraction dans les instruments d'optique.
- Ondes à trois dimensions : ondes planes, ondes sphériques.
- Chemin optique, principe de Fermat, déphasage dû à la propagation.
- Surfaces d'ondes. Théorème de Malus (admis).
- Interférences non localisées de deux ondes mutuellement cohérentes.
- Formule de Fresnel.
- Facteur de contraste.
- Exemple de dispositif interférentiel par division du front d'onde : trous (ou fentes) d'Young dans un milieu non dispersif ; source ponctuelle à distance finie et observation à grande distance.
- Interférences de N ondes cohérentes de même amplitude.
- Réseaux. Relation fondamentale des réseaux.

- **CPMPI4I Compléments de Mathématiques discrètes (20h):**

Algorithmique : Principe d'algorithmes d'exploration avec retour en arrière, via l'exemple du problème des n reines.

Analyse d'algorithme : Illustration par quelques exemples des notions de complexité en moyenne et dans le pire cas.

Graphes : Notions sur les graphes et algorithmes de recherche des plus courts chemins d'un sommet aux autres (Dijkstra et Bellman-Ford).

Langages : Introduction à la combinatoire des mots et à la notion de code.

Probabilités : compléments d'analyse combinatoire et introduction aux chaines de Markov.

- **Français – Expression écrite et orale 2 (25h)**