

**Descriptif des enseignements de la  
Classe Préparatoire Universitaire  
Mathématiques – Physique – Informatique  
de l'Université de Lorraine.**

Présentation de la formation :

La Classe Préparatoire Universitaire Mathématiques - Physique - Informatique de l'Université de Lorraine est une formation sélective complémentaire à la Licence de Mathématiques. Elle propose chaque semestre entre 120 et 150 heures de compléments de mathématiques, physique, informatique, français et anglais aux 300 heures de la licence. Elle a deux objectifs principaux :

- permettre à de bons étudiants de trouver à la Faculté des Sciences et Technologies un cursus post-bac exigeant et renforcé, supposant des prérequis et un engagement spécifique dans les études,
- leur offrir une préparation à des concours d'intégration dans des Écoles d'Ingénieur.

Descriptif succinct du contenu de la première année de formation :

**Semestre 1 :**

- **Calculs et mathématiques (80h)**
- **Algorithmique et Programmation 1 (68h)**
- **Introduction aux systèmes logiques et numériques (30h)**
- **Fondements mathématiques (40h)**
- **Électricité – Circuits électriques (30h)**
- **Mécanique du point (30h)**
- **Nombres complexes et géométrie (40h)**
- **Compétences transversales (50h)**
- **Compléments de physique 1 (40h)**
- **Français (25h)**
- **Compléments d'anglais (5h)**

**Semestre 2 :**

- **Algorithmique et Programmation 2 (73h)**
- **Algèbre linéaire 1 (74h)**
- **Analyse 1 (74h)**
- **Arithmétique (36h)**
- **Compléments d'analyse (36h)**
- **Compétences transversales (50h)**

- **Compléments de physique 2 (60h)**
- **Compléments d'Anglais (5h)**

Descriptif détaillé du contenu de la première année de formation :

**Semestre 1 :**

- **UE 101 Calculs et mathématiques (60h + 20h compléments de mathématiques 1) :**

Vocabulaire élémentaire pour l'étude de fonctions réelles.

Sous-ensembles de  $\mathbb{R}$ , intervalles ouverts et fermés, unions, intersections, complémentaires.

Domaine de définition d'une expression comportant une inconnue réelle.

Fonctions réelles définies sur une partie de  $\mathbb{R}$ .

Équations, inconnues, ensemble de solutions d'une équation. Méthodes de résolution d'une équation par équivalences, analyse-synthèse, disjonction de cas.

Fonctions usuelles.

Inégalités dans  $\mathbb{R}$  et règles de calcul. Fonctions croissantes.

Parité, imparité. Périodicité. Symétries du graphe d'une fonction. Fonction dont le graphe est le translaté du graphe d'une fonction donnée.

Valeur absolue, inégalité triangulaire.

Racine carrée, exponentielle et logarithme.

Rappels sur les fonctions cosinus et sinus, symétries de leurs graphes. Fonction tangente.

Formules de trigonométrie. Linéarisation. Écriture de la somme de sinusoides comme produit de cosinus, passage d'une forme  $L \cdot \cos(\omega \cdot t) + M \cdot \sin(\omega \cdot t)$  à une forme  $A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$

Puissances réelles d'un réel strictement positif. Exponentielle et logarithme de base  $a > 0$ .

Fonctions trigonométriques hyperboliques.

Résolution d'inéquations.

Composition des fonctions. Dérivée d'une composée.

Étude de fonctions. Limites usuelles. Asymptotes obliques.

Théorème de la bijection.

Primitives usuelles.

Primitives. Intégrale sur un segment. Intégration par parties. Changement de variable.

Équations différentielles linéaires.

Équations d'ordre un. Variation de la constante.

Équations d'ordre deux à coefficients constants à second membre de la forme  $P(x)e^{(ax)}\cos(bx)$  ou  $P(x)e^{(ax)}\sin(bx)$ .

Résolution d'une équation différentielle du type  $ay'' + by' + cy = f$  par la méthode de la variation de la constante.

Fonctions trigonométriques réciproques, trigonométriques hyperboliques réciproques. Applications aux primitives.

Systèmes linéaires. Algorithme de mise sous forme échelonnée. Paramétrage de l'ensemble des solutions. Interprétation géométrique : intersections de droites du plan, de plans dans l'espace.

Polynômes. Degré, division euclidienne, racines, équivalence  $P(a)=0$  et  $(X-a)$  divise  $P$ . Polynôme dérivé. Caractérisation par le polynôme dérivé des racines simples et des racines au moins doubles. L'étude générale des racines multiples et de leur multiplicité n'est pas traitée ce semestre. Fonctions polynomiales et rationnelles. Décomposition des fractions rationnelles dans des cas simples. On ne traitera pas le théorème général de décomposition des fractions rationnelles en éléments simples, qui sera vu ultérieurement. Applications aux primitives et aux équations différentielles.

▪ **UE 102 Algorithmique et Programmation 1 (60h + 8h de compléments d'informatique 1) :**

Notions de base pour résoudre un problème simple, depuis l'analyse, la décomposition en étapes jusqu'à la rédaction d'un algorithme

Introduction aux notions de : variable, type, instruction élémentaire, structure de contrôle.

Définition et utilisation de fonctions simples pour structurer et clarifier un algorithme.

Utilisation de structures de données simples : types structurés (tableaux, structures, chaînes de caractères, ...).

Programmation dans un langage de programmation impérative adapté.

Fonctions récursives, calcul des suites récurrentes ; Invariants de boucles ; Tris itératifs et preuves de correction.

▪ **UE 103 Introduction aux systèmes logiques et numériques (30h) :**

Savoir aborder des systèmes logiques et numériques

Contenu pédagogique de l'UE :

- Introduction à la logique combinatoire : Notion d'information binaire : bit, Table de vérité, représentation graphique ; Opérateurs logiques élémentaires (ET, OU, NON) ; Algèbre de Boole, variables booléennes, représentation des fonctions booléennes
- Simplification des fonctions logiques : Simplification algébrique, Simplification par les tableaux de Karnaugh, méthode de résolution
- Arithmétique binaire : systèmes de numération (bases 10, 2, 16) ; Conversions inter base, Représentation des nombres entiers, relatifs. Représentation des nombres décimaux en virgule fixe, Notation scientifique en virgule flottante. Arithmétique binaire (addition non signé, signé, ...),
- Codage de l'information : Codes binaires (BCD, GRAY, ASCII, EAN...).

▪ **UE 111 Fondements mathématiques (30h + 10h compléments de mathématiques 2) :**

Logique : Généralités sur le langage et le raisonnement mathématique.

Éléments de logique : calcul des prédicats, calcul des propositions. Utilisation des connecteurs et des quantificateurs dans le discours mathématique.

Pratique du raisonnement mathématique : hypothèses, conclusions, raisonnement par contraposition, par disjonction de cas, par l'absurde, par récurrence, par analyse-synthèse.

Vérification et utilisation d'une définition et d'un théorème. L'exemple des groupes et des morphismes de groupes sera traité. On ne fera pas un cours sur les groupes ni sur les structures en général.

Théorie des ensembles : appartenance, réunion, intersection, complémentaire et produit cartésien de deux ensembles ou d'une famille d'ensembles. Lien avec les connecteurs et les quantificateurs.

Applications : définition, composition, image directe, image réciproque, applications injectives, surjectives, bijectives, ensembles équipotents.

Combinatoire : Notion de cardinal, premières propriétés des cardinaux (inclusion, réunion). Nombres d'applications, de bijections de E dans F. Coefficients binomiaux, formule de Pascal, triangle de Pascal.

Sommes, produits. Sommes doubles, sommes télescopiques, géométriques, arithmétiques. Formule du binôme de Newton.

Relations d'ordre, majorants/minorants, bornes supérieures/inférieures  
Relations d'équivalence, classe d'équivalence, ensemble quotient

### ▪ UE 113 Électricité (30h) :

A l'issue de cette UE, l'étudiant devra :

- connaître les notions de base de l'électrocinétique
- maîtriser les lois et théorèmes généraux d'étude et d'analyse des circuits électriques en régime sinusoïdal à fréquence fixe et variable

Contenu pédagogique de l'UE :

EC1 : Dipôles en régime continu :

- Tension, intensité, puissance électriques
- Dipôles en régime continu : dipôles passifs de base (R,L,C) ; sources de tension et de courant ; point de fonctionnement ; loi d'Ohm
- Lois de Kirchhoff et Associations de dipôles
- Lois et théorèmes généraux (Thévenin, Norton, Superposition, Millman)

EC 2 : Dipôles en régime sinusoïdal :

- Notion de signal : descriptions temporelle et fréquentielle et grandeurs caractéristiques.
- Dipôles en régime sinusoïdal : étude à fréquence fixe
- Circuits en régime harmonique : étude à fréquence variable (RLC)

### ▪ UE 181 Mécanique du point (30h) :

Ce cours introduit la mécanique du point dans un cadre simple. Il aborde les principes de la mécanique newtonienne, la notion de trajectoire et les aspects énergétiques. Les problèmes mettant en jeu des forces sont traités en coordonnées cartésiennes avec des forces constantes. Une première approche des systèmes de coordonnées non cartésiennes est présentée de manière descriptive. Le mouvement circulaire est étudié dans la base polaire.

- Cinématique en coordonnées cartésiennes.
- Lois de Newton et interactions fondamentales.
- Mouvements sous accélération constante.
- Cinématique en bases polaire, cylindrique et sphérique.
- Mouvement circulaire.
- Notion de travail et de puissance.
- Théorème de l'énergie cinétique.
- Forces conservatives, énergie potentielle et mécanique.
- Chocs.

▪ **UE 182 Nombres complexes et géométrie (30h + 10h compléments de mathématiques 3) :**

Géométrie plane

1) Plan euclidien, points, droites. Orientation. Angles (orientés) et distances. Produit scalaire.

2) Transformations classiques du plan euclidien et leurs compositions : translations, réflexions orthogonales, symétries centrales, rotations, projections orthogonales sur une droite. Homothéties. Similitudes directes et indirectes. Théorèmes classiques de géométrie : Pythagore, Thalès, Al-Kashi, relations métriques dans le triangle.

3) Triangles. Points, droites et cercles remarquables d'un triangle. Triangles semblables, critère de similitude.

4) Repérage des points dans le plan : coordonnées cartésiennes. Produit scalaire en coordonnées cartésiennes. Calculs en coordonnées : paramétrages et équations de droites et cercles. Changement de repère.

5) Coordonnées polaires.

Nombres complexes

1) Théorie algébrique. Somme et produit dans  $\mathbb{R}^2$ , notation  $\mathbb{C}$ . Partie réelle et imaginaire. Conjugaison et module, règles de calcul, inégalité triangulaire. Calcul des racines carrées complexes d'un nombre complexe sous forme algébrique. Racines de trinômes à coefficients complexes. Somme et produit des racines.

2) Interprétation géométrique. Affixe d'un point, d'un vecteur; point et vecteur associé à un complexe. Interprétation de  $|a-b|$ , distance, cercles et disques.

3) Congruences modulo un réel non nul. Somme et produits de congruences. Application : équations trigonométriques (les fonctions trigonométriques sont supposées connues).

4) Arguments et exponentielle complexe. Arguments d'un produit et d'un quotient. Factorisation de  $e^{ix} + e^{iy}$ .

5) Nombres complexes de module un. Racines de l'unité. Somme et produit des racines  $n$ -èmes.

6) Similitudes planes. Écriture en coordonnée complexe des transformations classiques : translations, rotations, homothéties, réflexions orthogonales, similitudes directes et indirectes.

▪ **UE 190 Compétences transversales (50h + 5h anglais) :**

NUMOC : Appropriation des environnements numériques mis à disposition par les étudiants. Acquisition de processus et de démarches de travail ainsi que le développement d'un regard réflexif lié aux enjeux du numérique.

▪ **CPMPI1P Compléments de Physique 1 (40h) :**

Compléments et exercices d'optique géométrique

- notion de rayon lumineux, lois de Descartes
- généralités sur la formation des images
- stigmatisme et aplanétisme
- lentilles minces et miroirs dans l'approximation de Gauss - relations de conjugaison
- association de lentille minces et/ou de miroirs
- constructions géométriques et méthode analytique - dioptries et miroirs plans et sphériques, prisme
- œil et instruments d'optique

Mécanique du point

Cinématique :

- référentiels, systèmes de coordonnées

Dynamique du point matériel :

- référentiels galiléens. Lois de Newton : principe de l'inertie, loi fondamentale, loi des actions réciproques.
- théorème de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie cinétique.
- énergie potentielle, énergie mécanique
- mouvement conservatif à une dimension
- oscillateur harmonique à une dimension
- gravitation, application à la dynamique terrestre

**Semestre 2 :**

▪ **UE 201 Algorithmique et programmation 2 (60h + 13h de compléments informatique 2) :**

Algorithmique et programmation récursives.

Programmation dans un langage de programmation impérative adapté.

Structures de données : listes, piles, files (types abstraits et implantations). Conception d'un programme simple depuis la spécification informelle jusqu'aux tests.

Tris de tableaux (tri fusion, tri rapide) ; Notions de complexité. Notations de Landau. Variants.

▪ **UE 211 Algèbre linéaire 1 (60h + 14h compléments d'algèbre linéaire 1) :**

Espaces vectoriels

Définition, exemples. Produit cartésien. Sous-espaces vectoriels, opérations sur les sous-espaces (intersection, somme, somme directe).

Exemples traités : sous-espaces de  $\mathbb{R}^n$ , vecteurs du plan euclidien ou de l'espace, espaces de fonctions, de fonctions polynomiales. Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire sans second membre.

#### Applications linéaires

Image, noyau. Exemples (homothéties, projections, symétries, interprétation géométrique). Exemples également traités en TD : transformations classiques du plan vectoriel euclidien. Image réciproque d'un élément par une application linéaire, sous-espaces affines d'un espace vectoriel. Exemple de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire.

#### Espaces vectoriels de dimension finie

Familles libres, génératrices, bases. Théorème de la base incomplète (construction d'une base extraite d'une famille génératrice ou complétant une famille libre). Équipotente des bases et définition de la dimension.

Dimension des sous-espaces (somme directe, formule de Grassmann). Rang d'une famille de vecteurs. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang.

#### Calcul matriciel

Somme, produit et propriétés. Transposée.

Matrices carrées. Matrices symétriques et antisymétriques. Trace.

Matrices inversibles. Calcul de la matrice inverse à l'aide d'un système d'équations linéaires.

Matrice d'une application linéaire. Changement de base.

Rang d'une matrice: lien avec le rang d'une famille de vecteurs et le rang d'une application linéaire, méthode de calcul.

Exemples traités en TD :

- a) matrices de transvection, de dilatation, leurs produits et inverses. Interprétation matricielle de l'algorithme du pivot de Gauss.
- b) matrices diagonales, triangulaires, produits et inverses
- c) matrices des transformations du plan vectoriel euclidien : rotations, réflexions orthogonales.

Résolution d'une équation linéaire d'ordre  $k$  ;

Définition du groupe des permutations d'un ensemble fini, définition d'une transposition et de la signature d'une transposition ;

Projecteurs ; Formes linéaires et espace dual ; Espace quotient ; Compléments sur les sommes directes ; Complexification.

#### ▪ UE 212 Analyse 1 (60h + 14h compléments d'analyse 1) :

Première étude de la topologie de la droite réelle. Continuité et dérivation des fonctions sur un intervalle.

Propriétés de la droite réelle : Relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ . Parties majorées, minorées, bornées, majorant, minorant. Intervalles. Valeur absolue et inégalité triangulaire. Théorème de la borne supérieure. Densité de  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Une construction axiomatique de  $\mathbb{R}$  n'est pas un objectif ici.

Suites de nombres réels et de nombres complexes : Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Limite d'une suite. Unicité de la limite. Toute

suite convergente est bornée. Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Opérations sur les limites.

Théorèmes de convergence et divergence pour les suites. Théorème de la limite monotone. Suites adjacentes. Théorème des encadrements. Théorème de divergence par minoration ou majoration. Suites extraites. Théorème de Bolzano-Weierstrass. Suites de Cauchy. Complétude de  $\mathbb{R}$ . Liens entre valeurs d'adhérence et suites extraites.

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence pour les suites : Liens entre les relations de comparaison. Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Fonctions d'une variable réelle : limite en un point, continuité, prolongement par continuité en un point. Continuité à gauche, à droite. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point. Fonctions continues sur un intervalle. Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition. Théorème des valeurs intermédiaires. Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone. La réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle est continue.

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point (domination, prépondérance, équivalence). Extension des résultats pour les suites.

Dérivation : Taux d'accroissement. Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite. Dérivabilité et fonction dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque. Théorème de Rolle, égalité et inégalité des accroissements finis. Fonctions de classe  $C^k$ . Opérations sur les fonctions de classe  $C^k$  : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque. Théorème de classe  $C^k$  par prolongement. Formule de Taylor-Lagrange.

#### ▪ UE 231 Arithmétique (30h + 6h compléments d'arithmétique) :

Arithmétique élémentaire.

Divisibilité dans  $\mathbb{Z}$

PGCD de deux entiers dont un est non nul.

Division euclidienne. Lemme et algorithme d'Euclide. Éléments de Bézout. Lemme de Gauss. Structures usuelles. Relations d'équivalence.

Congruences dans  $\mathbb{Z}$ . Compatibilité de la congruence avec les opérations de  $\mathbb{Z}$ . Entiers premiers entre eux.

Nombres premiers.

Valuations  $p$ -adiques. Notation  $v_p(n)$ . Propriétés (valuation de sommes et produits).

Existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers.

PPCM.

Petit théorème de Fermat.

Polynômes et leur arithmétique.

Rappels sur le degré, la divisibilité, la division euclidienne, polynôme dérivée et les racines simples.

Aspects linéaires, en lien avec l'UE "Algèbre linéaire 1" : base des  $X^n$ , familles à degrés échelonnés. L'évaluation en un scalaire et la dérivation sont linéaires, noyaux.

Composition des polynômes, la composition par  $\mathbb{Q}$  est linéaire. Applications de la linéarité : formules de dérivée d'une somme, d'un produit, d'une composée. Formule de Taylor.

Étude générale des racines multiples, multiplicité, caractérisation en termes de divisibilité ou d'annulation des polynômes dérivés.

Ordre ou multiplicité d'annulation d'un polynôme en un scalaire  $a$ , et propriétés. Notation  $\text{mult}_a(Q)$  ou  $v_a(Q)$ . Lien avec les valuations  $p$ -adique sur les entiers.

Polynômes scindés. Théorème d'Alembert-Gauss (preuve admise, étude possible en TD).

Relations coefficients-racines. Fonctions symétriques élémentaires des racines. Polynômes symétriques.

PGCD de deux polynômes (dont un est non nul). Polynômes premiers entre eux.

Lemme d'Euclide, algorithme d'Euclide. Éléments de Bézout. Lemme de Gauss.

Polynômes irréductibles, factorisation des polynômes. On n'étudiera en détail que les cas de  $R[X]$  et  $C[X]$ . Exemple de la factorisation de  $X^n-1$  sur  $R$ . PPCM.

Relations de congruence, ensemble quotient, anneau  $Z/nZ$ , structure de corps si  $n$  premier, calcul modulaire.

Les travaux pratiques pourront porter sur l'implémentation (itérative ou récursive) de l'algorithme d'Euclide, de divers tests de primalité, ou d'algorithmes liés à la cryptographie.

▪ **UE 232 Compléments d'analyse (30h + 6h compléments études des courbes) :**

Étude locale des fonctions. Développement limité, unicité des coefficients, troncature. Forme normalisée d'un développement limité :  $f(a+h) = h^p(a_0+a_1h+\dots+a_nh^{n+o(h^n)})$  avec  $a_0$  non-nul. Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient. Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre  $n$  en un point d'une fonction de classe  $C^n$ . Développement limité à tout ordre en 0 de  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\text{sh}$ ,  $\text{ch}$ ,  $x \rightarrow \ln(1+x)$ ,  $x \rightarrow (1+x)^a$ ,  $\text{Arctan}$ , et de  $\tan$  à l'ordre 3. Exemples de développements asymptotiques.

La formule de Taylor-Young est admise (démontrée dans l'UE Analyse 2).

Extrema locaux d'une fonction. Extremum local. Point critique. Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local. Utilisation des développements limités pour préciser l'allure d'un graphe au voisinage d'un point.

Convexité des fonctions. Fonctions convexes sur un intervalle. Caractérisation par la convexité de l'épigraphe ou la croissance des taux d'accroissements. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses cordes. Caractérisation de la convexité pour les fonctions dérivables et les fonctions deux fois dérivables. Position du graphe par rapport aux tangentes. Inégalité de convexité.

Propriétés affines des courbes planes. Études des courbes paramétrées planes de classe  $C^k$ . Symétrie et réduction du domaine d'études. Courbes régulières. Vecteurs tangents. Droite Tangente. Indices fondamentaux. Points de rebroussement. Allures locales des courbes en fonction des indices fondamentaux. Branches infinies : direction asymptotique et droite asymptote. Tracé de courbes. Exemples de paramétrage simple de courbes implicites (cercle, ellipse, astroïde, folium de Descartes...)

L'étude systématique des courbes en coordonnées en polaires ni les propriétés métriques des courbes ne sont au programme.

▪ **UE 290 Compétences transversales (50h +5h anglais) :**

NUMOC : Appropriation des environnements numériques mis à disposition par les étudiants. Acquisition de processus et de démarches de travail ainsi que le développement d'un regard réflexif lié aux enjeux du numérique.

## ▪ CPMPI2P Compléments de physique 2 :

Compléments de mécanique du point et mécanique du solide

Cinématique :

- changements de référentiels, lois de composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'une translation et dans le cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe. Vecteur rotation d'un référentiel par rapport à un autre.

Dynamique du point matériel :

- référentiels non galiléens, forces d'inertie.
- mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale en  $1/r^2$ . Lois de Kepler
- force de Lorentz. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme. Mouvement circulaire d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur-vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétique

Cinématique du solide :

- définition du solide
- masse, centre de masse et moment d'inertie dans le cas de solides simples (sphère, cylindre, tige, ...)
- quantité de mouvement, moment cinétique
- énergie cinétique

Dynamique du solide :

- modélisation des actions mécaniques
- théorèmes généraux de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie cinétique, de l'énergie mécanique appliqués au solide en rotation autour d'un axe fixe.

Compléments d'électromagnétisme 1

Applications de l'électrostatique. Énergie électrostatique d'une charge dans un champ E.

Théorème de Gauss, formes intégrale et locale. Dipôles dans un champ électrostatique.

Condensateur plan : capacité C

Magnétostatique :

- le champ magnétostatique B
- distribution de courants, invariances, emploi des symétries dans le cas des pseudo-vecteurs
- flux du champ magnétostatique
- théorème d'Ampère, circulation du champ magnétostatique
- force de Laplace sur un circuit filiforme