Factorisation, arithmétique et géométrie

Problème 1. Factoriser les expressions suivantes :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= (6x+3)-(x-4)(2x+1) & \mathrm{E} &= (2x+5)(2x-4)-x^2+4\\
\mathrm{B} &= 4x^2-16+(2x+3)(x-2) & \mathrm{F} &= (x-3)(2x-1)^2+(12-4x)\\
\mathrm{C} &= (x^2-9)(2x+1)-(x-3)(2x+1)^2 & \mathrm{G} &= 12x^2-3+(2x+1)^2\\
\mathrm{D} &= 3(2x-1)+(x+2)(2-4x) & \mathrm{H} &= (2x-2)^2-x^2+1
\end{aligned}
$$

(Cet exercice provient de `https://www.xm1math.net`, qui propose des corrigés. Il est conseillé de s'entraîner au calcul très régulièrement, au moins une fois par semaine!)

Problème 2. Les triplets pythagoriciens sont des triplets d'entiers a, b et c positifs tels que $a^2+b^2=c^2$. Le plus connu est $(a,b,c)=(3,4,5)$.

1. En trouver un autre qui commence par 5.
2. Trouver tous les triplets pythagoriciens dont un des termes est <10.

(Penser aux identités remarquables!)

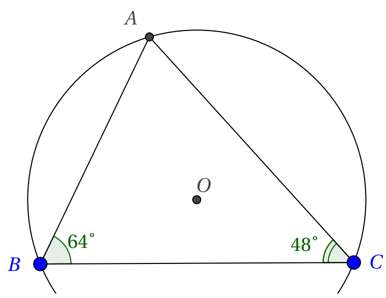
> Les deux exercices qui suivent proviennent de l'excellent livre *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres* de Wacław Sierpiński. Ce mathématicien polonais a écrit un très grand nombre d'articles de recherche et de livres et a laissé son nom à deux fractales célèbres : le triangle et le tapis de Sierpiński.

Problème 3. [Sierpiński 55] Un triangle rectangle a des côtés entiers, qui sont en progression arithmétique, c'est-à-dire que $b=(a+c)/2$, si on note $a\le b\le c$ les côtés du triangle. Trouver tous les cas possibles pour les longueurs des côtés.

Problème 4. [Sierpiński 60] On dit qu'un nombre entier a **est une puissance** s'il existe un entier $n>1$ et un autre entier b tels que $a=b^n$. Par exemple, 10 n'est pas une puissance, alors que 8 ou 36 sont des puissances.

Montrer qu'il ne peut exister quatre entiers consécutifs tels que chacun soit une puissance.

Problème 5. Soit O le centre du cercle circonscrit d'un triangle ABC. Sachant que $\widehat{B}=64°$ et $\widehat{C}=48°$, calculer $\widehat{A}$ puis $\widehat{OBC}$, $\widehat{OAC}$ et $\widehat{OAB}$.

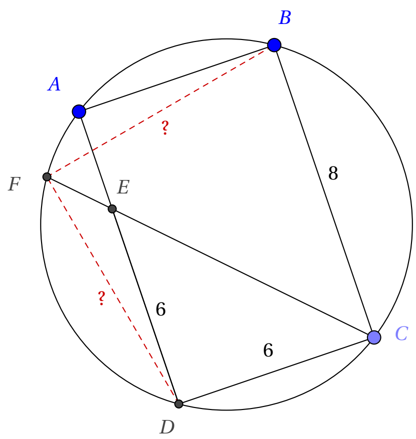


Problème 6. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible avec $AB = CD$ Montrer que c'est un trapèze isocèle.

Problème 7. Un triangle dont les trois angles sont aigus est appelé *triangle acutangle*. Montrer que pour un triangle acutangle, le centre du cercle circonscrit est toujours à l'intérieur du triangle.

Quelle est la réciproque de ce théorème ? Est-elle également vraie ? Trouver un exemple de théorème ou de propriété dont la réciproque est fausse.

Problème 8. Soit $ABCD$ un rectangle avec $AB = 6$ et $BC = 8$. Sur $[AD]$, on place E vérifiant $AE = 2$. La droite (CE) recoupe le cercle circonscrit à $ABCD$ en F. Calculer les longueurs FB et FD.



Problème 9. Soit ABC un triangle direct, O le centre de son cercle circonscrit et H le pied de la hauteur issue de A. Montrer que $\widehat{OAB} = \widehat{HAC}$.

⋆ ⋆ ⋆

Problème 10. Résoudre les équations suivantes en factorisant. (Même pour ceux sachant utiliser le discriminant, essayez de ne pas l'utiliser et entraînez-vous à « voir » les solutions.)

1. $2x^2 - 4x - 16 = 0$
2. $x^2 + 3x - 28 = 0$
3. $\dfrac{a^6}{4} - 49a^4 = 0$
4. $9a^2 - 49 = 0$

Problème 11. Factoriser les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} A &= 49a^5 - 28a^4b + 4a^3b^2 \\ B &= 81a^4x - 16b^4x \\ C &= 9a^2 + 36a^8 + 36a^5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} D &= 162x^5 - 2x \\ E &= 2x^3 + 10x^2 - 168x \\ F &= 4x^3y + 4x^2y - 80xy \end{aligned}$$