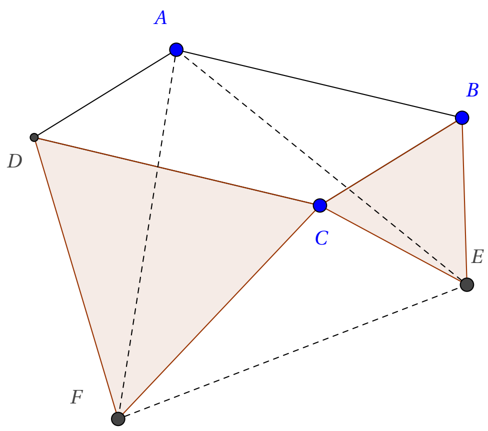
Triangles isométriques

Problème 1. [Consolidation en calcul] Résoudre les équations suivantes, en factorisant :

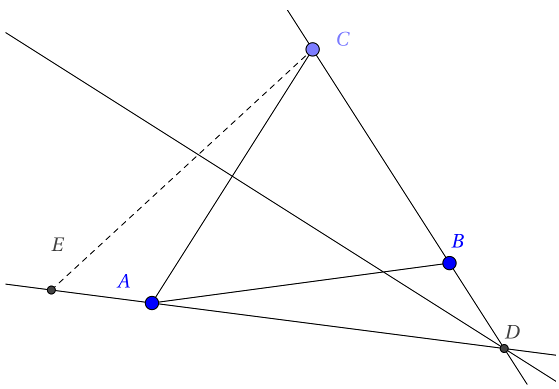
$$5x^3 - 20x = 0;\quad 4x^3 + 8x^2 + 4x = 0;\quad (x+3)^2 + 3x^2 + 6x = 0;\quad 2x^3 - 8x = -2x - 4;$$

$$81x^4 - 16 = 0;\quad 8x^3 + 125 = 0;\quad x^2 - 12x + 20 = 0;\quad 4x^2 - 12x + 9 = 0.$$

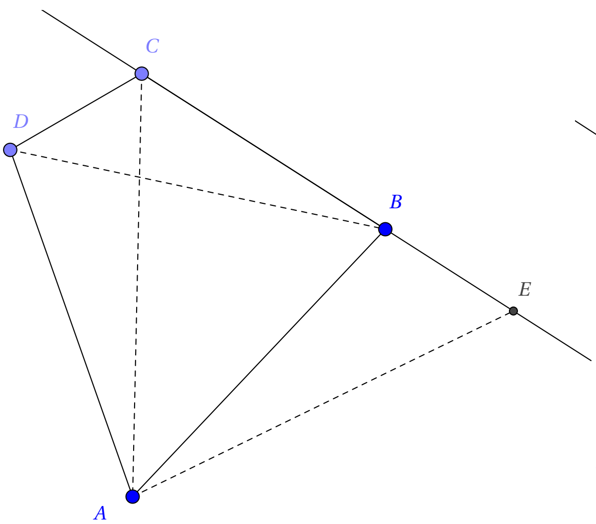
Problème 2. Sur un parallélogramme $ABCD$ indirect, on construit des triangles équilatéraux extérieurs BCE et CDF (directs). Montrer que AEF est équilatéral.



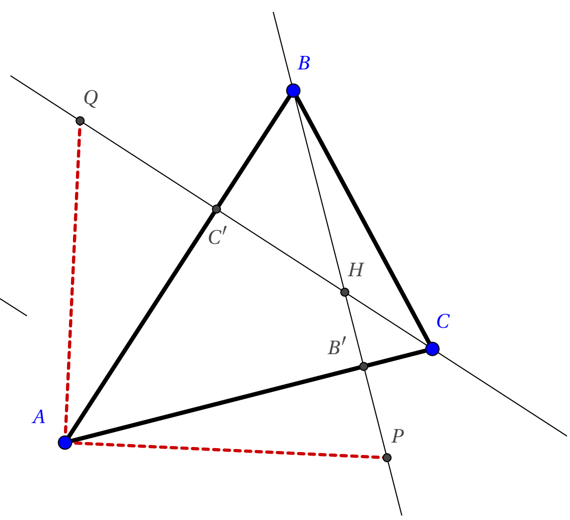
Problème 3. On considère un triangle ABC isocèle en A. La médiatrice du côté $[AC]$ coupe la droite (BC) en D. On joint DA que l'on prolonge d'une longueur $AE = BD$. Que peut-on dire du triangle CDE ?



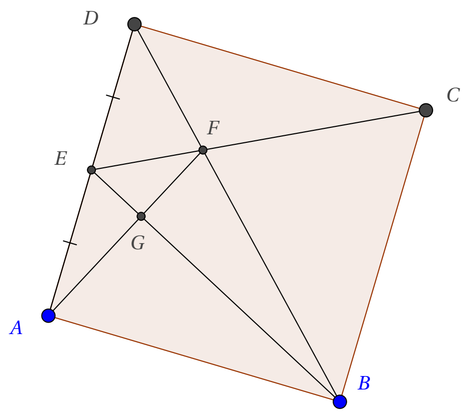
Problème 4. Dans un quadrilatère convexe $ABCD$ on a $AB = AD$ et $\widehat{B} + \widehat{D} = 180°$. On prolonge CB d'une longueur $BE = DC$. Démontrer que (CA) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{DCB}$.



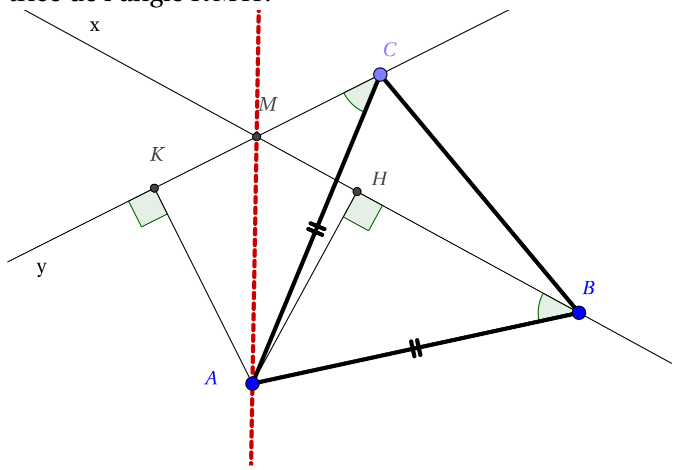
Problème 5. Soit ABC un triangle. On note B' et C' les pieds des hauteurs issues de B et C. Sur la demi-droite $[BB')$, on place le point P qui vérifie $BP = AC$, et sur la demi-droite $[CC')$, on place le point Q qui vérifie $CQ = AB$. Montrer que AQP est rectangle isocèle en A.



Problème 6. Dans un carré $ABCD$, on note E le milieu de $[AD]$, F l'intersection de $[EC]$ et $[BD]$, et enfin G l'intersection de $[AF]$ et $[EB]$. Montrer que AGB est rectangle en G.



Problème 7. Soit un triangle isocèle ABC de base $[BC]$. On construit une demi-droite Bx intérieure à l'angle $\widehat{ABC}$, et une demi-droite Cy extérieure à l'angle $\widehat{ACB}$ de telle sorte que les angles $\widehat{ABx}$ et $\widehat{ACy}$ soient égaux. Les demi-droites Bx et Cy se coupent en M. Montrer que (AM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{KMH}$.



Problème 8. Sur l'extérieur d'un triangle ABC, on colle des triangles équilatéraux $A'BC$ et $C'AB$. On note F l'intersection des droites (AA') et (CC').

1. Montrer que $AA' = CC'$. Quel est l'angle entre (AA') et (CC') ?
2. On colle un troisième triangle équilatéral $B'CA$ sur l'extérieur du troisième côté. Montrer que F, B et B' sont alignés.

*Remarque : ceci montre que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes. Le point de concours est appelé **premier centre isogonique** du triangle ABC. Dans certains cas , il coïncide avec le **point de Fermat-Torricelli**.*

Problème 9. Sur les côtés d'un triangle ABC, on colle extérieurement des carrés $ABC'C''$, $BCA'A''$ et $CAB'B''$, de centres R, Q et P, comme sur la figure ci-contre. Il y a énormément de résultats classiques à démontrer avec cette figure.

1. Montrer que $(PR)//(B''C')$.
2. Montrer que $[BB']$ et $[CC'']$ ont même longueur et sont perpendiculaires.
3. Montrer que leur intersection est sur $C'B''$.
4. Montrer que $(AQ)\perp(PR)$.
5. Soit X le milieu de $[BC]$. Montrer que RPX est rectangle isocèle en X.
6. Montrer que (AQ), (BP) et (CR) sont concourantes. Le point de concours est le **point de Vecten extérieur** de ABC.

*Remarque : ce point possède beaucoup de propriétés remarquables. On peut également définir un point de Vecten **intérieur**.*