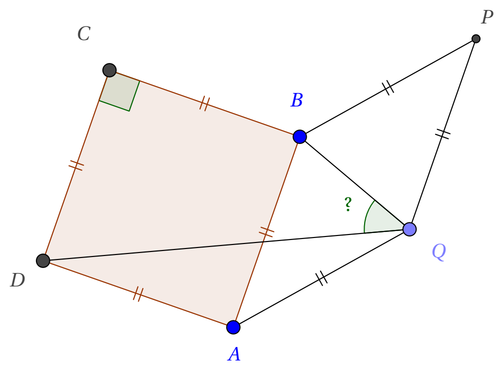
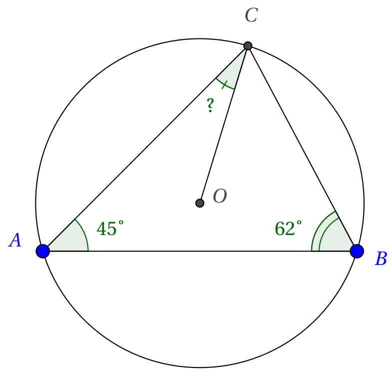
Angles inscrits

Problème 1. [Triangle inscrit dans un demi-cercle] Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$, et M un autre point du cercle. Montrer que l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.

Réciproquement, montrer que si ABM est un triangle rectangle en M, alors M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Problème 2. Deux angles à trouver :





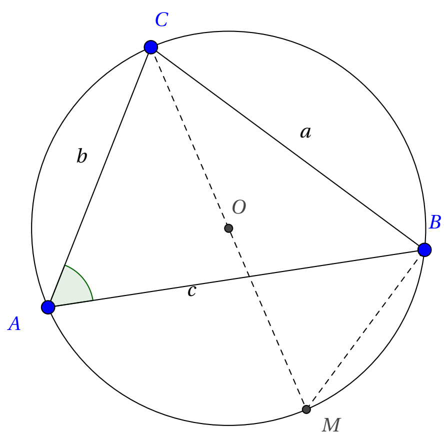
Problème 3. On place quatre points A, B, C et D sur un cercle $\mathscr{C}$ (dans cet ordre). On note I, J, K et L les milieux des arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ et $\overset{\frown}{DA}$. Montrer que $(IK)\perp(JL)$.

Problème 4. [Loi des sinus] Soit ABC un triangle, dont on note a, b et c les côtés, et r le rayon du cercle circonscrit. La « loi des sinus » est l'énoncé suivant :

$$\boxed{\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2r}$$

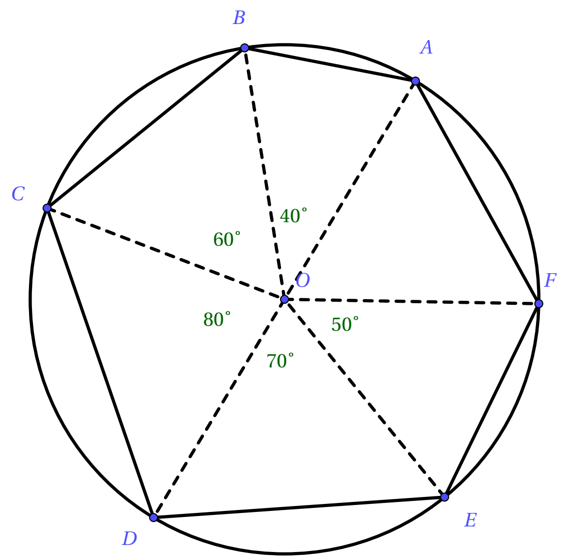
Démontrer ce théorème, en s'aidant de l'indication fournie par la figure ci-contre.

(La loi des sinus est un résultat très utile en géométrie. On reviendra sur ce théorème dans une prochaine feuille.)



Problème 5. Un quadrilatère convexe $ABCD$ est inscrit dans un cercle de centre O. La diagonale $[BD]$ est un diamètre, et la diagonale $[AC]$ est égale au rayon. Calculer les angles du quadrilatère.

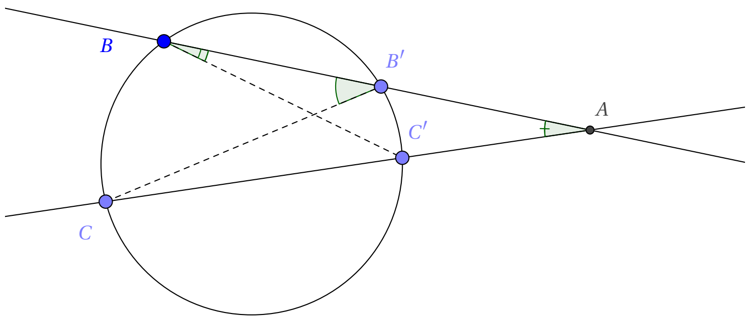
Problème 6. Sur un cercle, on porte des arcs consécutifs AB, BC, CD, DE et EF mesurant respectivement 40°, 60°, 80°, 70° et 50°. Calculer les angles aux sommets de l'hexagone (non régulier) $ABCDEF$. Quelle est la somme de tous ces angles ? Existe-t-il une formule générale pour la somme des angles d'un polygone ?



Problème 7. Dans cet exercice, on cherche à démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes en utilisant le théorème de l'angle inscrit.

Soient A' et B' les pieds des hauteurs issues de A et B, et H leur point d'intersection. Montrer que $\widehat{AA'B'} = \widehat{ABB'}$. Que dire de $CA'HB'$? Terminer la preuve.

Problème 8. Deux sécantes (BB') et (CC') à un même cercle se coupent en un point extérieur A. Démontrer que l'angle $\widehat{BAC}$ est égal à la différence des angles inscrits $\widehat{BB'C}$ et $\widehat{B'BC'}$.



Problème 9. [Ennéagone] Soit $ABCDEFGHI$ un ennéagone régulier, c'est-à-dire un polygone (convexe) régulier à neuf côtés : tous les côtés ont la même longueur, et tous les angles au sommet sont égaux.

Que valent les angles aux sommets du polygone, en degrés ?

Que vaut l'angle $\widehat{ABH}$? Qu'en est-il des angles $\widehat{ABI}$, $\widehat{ABG}$, $\widehat{ABF}$ etc ?

Plus difficile : soit P l'intersection de (BH) et de (AD). Calculer la mesure de $\widehat{DPC}$.

(Commencer par déterminer le plus d'angles possibles, puis utiliser un des exercices précédents.)