Le raisonnement par l'absurde

Problème 1. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers relatifs a et b tels que $21a - 6b = 1$.

Problème 2. Soit n un entier. Montrer que si $n^3 + 5$ est impair, alors n est pair.

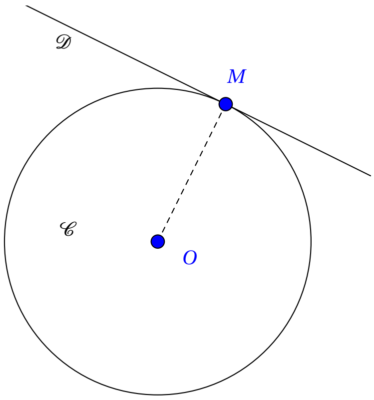
Problème 3. Montrer qu'un entier ne peut pas diviser à la fois 45 et 46. Ensuite, démontrer le résultat plus général que voici :

Soient a et b deux entiers relatifs, avec $a \geq 2$. Alors a ne peut diviser à la fois b et $b+1$.

(Attention, on ne peut pas forcément utiliser la même idée pour le cas général...)

Problème 4. À une table ronde sont assis 25 garçons et 25 filles. Montrer qu'il existe une personne dont les deux voisins sont des filles.

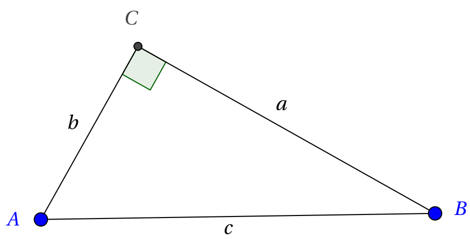
Problème 5. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et $\mathscr{D}$ une droite qui ne l'intersecte qu'un seul point, que l'on note M. Montrer que $\mathscr{D} \perp (OM)$.



Problème 6. On considère l'énoncé suivant, suivi d'une preuve par l'absurde. La preuve est-elle correcte ? D'autre part, l'énoncé est-il vrai ?

Énoncé. Soient x et y des nombres réels tels que $x + y = 10$. Alors, $x \neq 3$ et $y \neq 8$.
Preuve. Supposons par l'absurde que l'énoncé soit faux. Dans ce cas, sous l'hypothèse de l'énoncé, on a $x = 3$ et $y = 8$. Mais alors $x + y = 11$, ce qui contredit l'hypothèse que $x + y = 10$. C'est donc que l'énoncé est vrai.

Problème 7. Soit ABC un triangle rectangle en C, et notons a, b et c les longueurs de ses côtés comme sur la figure ci-dessous. Démontrer l'inégalité stricte $c < a + b$. (Ceci est un cas particulier de l'*inégalité triangulaire*, que l'on n'utilisera donc évidemment pas pour résoudre ce problème !)



Problème 8. Montrer qu'un entier est pair si et seulement si son carré est également pair. Comment pourrait-on généraliser ce résultat ? (Par exemple, est-ce qu'un nombre est divisible par quatre si et seulement si son carré est divisible par quatre ? Et pour la divisibilité par cinq ?)

Problème 9. (Un grand classique) Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Problème 10. Soient a, b et c trois entiers impairs. Montrer qu'aucun nombre rationnel x ne peut vérifier l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Problème 11. Trouver une façon simple de caractériser la liste (infinie) suivante : 3, 7, 11, 15 etc. Montrer que cette liste d'entiers ne contient aucun carré parfait.

Problème 12. Un nombre premier est un entier ≥ 2 qui n'admet que deux diviseurs : 1 et lui-même.

1. Dresser la liste des nombres premiers inférieurs à 50.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
3. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $3n+2$, avec n entier. Même question pour des nombres premiers de la forme $4n+3$.
4. La même méthode marcherait-elle pour montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $5n+4$, $6n+5$, $7n+6$ etc ?

Si a et b sont premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers congrus à b modulo a, c'est-à-dire de la forme $an+b$. C'est le célèbre théorème de la progression arithmétique*, démontré en 1838 par Dirichlet. Ce théorème est très difficile, ne serait-ce que dans le cas $b=1$ qui requiert des polynômes cyclotomiques. Le cas général nécessite de l'analyse d'assez haut niveau (≥bac+3).*

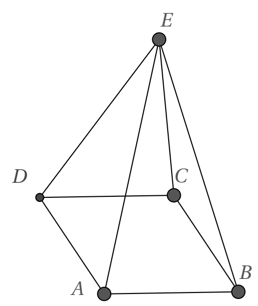
Problème 13. Montrer que pour tout réel $x \in [0, \pi/2]$, on a

$$\cos x + \sin x \geq 1.$$

Est-ce vrai pour tout réel x ? (Bonus : proposer d'autres preuves, sans raisonnement par l'absurde. Comparer la longueur et la difficulté des différentes preuves.)

Problème 14. Soient a, b et c des entiers. Montrer que si ces trois entiers forment un triplet pythagoricien, c'est-à-dire que $a^2 + b^2 = c^2$, alors a ou b est pair.

Problème 15. On considère $ABCDE$ une pyramide à base carrée $ABCD$. Montrer qu'on ne peut pas parcourir les arêtes de la pyramide en suivant un chemin continu qui passe une et une seule fois sur chaque arête.



Problème 16. Soit $n > 1$ un entier. Montrer que le nombre $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ n'est pas un entier.

Problème 17. (Infinité de nombres premiers sans jumeau) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ n'est pas premier. [1]

Problème 18. Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(f(x)) = -x$ pour tout x.

1. Deux nombres premiers sont dits *jumeaux* si ce sont deux nombres impairs consécutifs. C'est par exemple le cas de 5 et 7, 11 et 13, 29 et 31 et de bien d'autres. Une très célèbre conjecture affirme qu'il existerait une infinité de nombres premiers jumeaux. Elle n'est pas démontrée à ce jour.