# Axiomatique, épisode 1

**Exercice 1.** [Réseau ferré de Poldévie] La Poldévie veut construire un réseau ferré, composé de *gares*, au nombre de $n \in \mathbb{N}$, et de *lignes* reliant des gares entre elles. Pour des raisons d'efficacité et de coût, le réseau doit respecter les contraintes suivantes (et a priori uniquement celles-là) :

**Axiome 1.** Toute gare du réseau est une correspondance, autrement dit toute gare est sur au moins deux lignes.

**Axiome 2.** Toute ligne comporte au moins quatre gares.

**Axiome 3.** Il n'y a pas assez d'argent pour cinq gares (c'est-à-dire $n \leq 4$).

1. Comme les ingénieurs ont du mal, le ministre des transports offre une forte somme au mathématicien Nicolas Bourbaki pour débloquer la situation (et menace de l'emprisonner en cas d'échec). Bourbaki empoche l'argent et propose un réseau valable. Expliquer.
2. Le gouvernement n'a pas aimé la dernière blague de Bourbaki, qui a entre-temps reversé la somme à l'Institut Poldève de Logique. On lui demande un autre plan de réseau. Il s'exécute encore. Expliquer. (Après quoi il émigre en France, pays où il n'a plus à craindre pour sa vie et dont il contribue par la suite grandement au rayonnement mathématique.) [1]

**Exercice 2.** [Avant-goût des axiomes de Peano] Cédric s'ennuie un peu à son nouveau boulot et regrette le temps où il faisait des maths. Pour passer le temps il invente une nouvelle opération sur les entiers naturels, en plus de $+$ et $\times$ qui sont supposées connues. Cette nouvelle opération sera notée $a \star b$ et suit les règles suivantes :

**Axiome 1.** Pour tout entier naturel $n$, on a $n \star 0 = n$.

**Axiome 2.** Pour tout couple $(p, q)$ d'entiers naturels, on a $(p \star q) + 1 = p \star (q + 1)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n \star 1 = n + 1$ et $n \star 2 = n + 2$. En fait, montrer que pour tout $p$ et $q$, on a $p \star q = p + q$.

**Exercice 3.** Des mathématiciennes publient des articles scientifiques. Un article peut être signé par plusieurs mathématiciennes, et une mathématicienne peut être autrice de plusieurs articles. On suppose que la publication d'articles obéit aux axiomes suivants :

**Axiome 1.** Il y a au moins deux articles.

**Axiome 2.** Un article a toujours au moins deux autrices.

**Axiome 3.** Deux mathématiciennes données ont un article en commun et un seul.

**Axiome 4.** Étant donnés un article et une mathématicienne n'ayant pas signé cet article, alors il existe exactement un article signé par cette mathématicienne et dont les autrices n'ont pas non plus signé le premier article.

**Axiome 5.** Deux articles n'ont jamais exactement la même liste d'autrices.

Montrer que le dernier axiome est inutile : c'est en réalité un théorème qui se déduit des autres axiomes. Démontrer ensuite les théorèmes suivants :

1. Il y a au moins quatre mathématiciennes (et il peut y en avoir exactement quatre).
2. Deux articles distincts ont soit une, soit aucune autrice en commun.
3. Il peut y avoir exactement neuf mathématiciennes.
4. Tous les articles ont le même nombre d'autrices.

1. Pour comprendre la blague, chercher « Nicolas Bourbaki » sur Wikipédia.

**Exercice 4.** Une entreprise réceptionne et livre des marchandises par lots de différents volumes. Les volumes de marchandises qu'il est possible de réceptionner ou livrer sont des entiers relatifs (un volume positif correspond à une entrée de marchandise, un volume négatif à une sortie de marchandise). Pour des raisons de simplification, ces volumes sont standardisés par les règles suivantes :

**Axiome 1.** 0 est un volume standardisé.

**Axiome 2.** Si $V$ est un volume standardisé, alors $-V$ aussi.

**Axiome 3.** Si $V$ et $V'$ sont des volumes standardisés, alors $V + V'$ aussi.

Montrer que tous les volumes standardisés sont exactement les multiples d'un seul et même volume de base.

**Exercice 5.** On désire mettre au point un jeu de société. Le jeu sera constitué de cartes où seront imprimés différents symboles. Le jeu devra se conformer aux axiomes suivants :

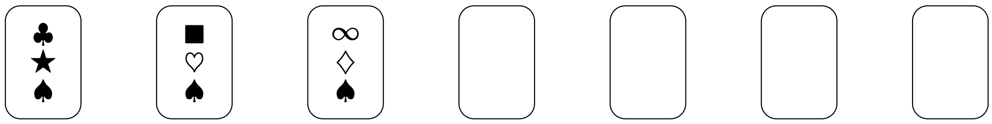
**Axiome 1.** Chaque carte comporte exactement trois symboles, distincts.

**Axiome 2.** Chaque symbole apparaît dans exactement trois cartes.

**Axiome 3.** Deux cartes données ont toujours exactement un symbole en commun.

**Axiome 4.** Deux symboles étant donnés, il y a une et une seule carte qui contient les deux.

Montrer qu'un tel jeu est constitué d'exactement sept cartes, et qu'il y a sept symboles. Puis, compléter le jeu suivant (dessiner les cartes manquantes) :




Si on enlève l'axiome 4, peut-on concevoir un jeu avec moins de cartes ? Et si on enlève les axiomes 2 et 4 ? Ou les axiomes 3 et 4 ?
*(Le jeu de société « Dobble » vérifie presque les axiomes 1-4 si on remplace « trois » par « huit » dans les axiomes 1 et 2. Presque, car s'il vérifiait les axiomes, il aurait 57 cartes et symboles, mais il n'en a que 55 pour des raisons pratiques. C'est un bon exercice de comprendre quelles sont les deux cartes « manquantes ».)*[2]

**Exercice 6.** [Théorie axiomatique des banquets de Hausberger] Lors d'un banquet, les invités sont assis à différentes tables. On se propose d'axiomatiser les banquets comme suit. Un « banquet » est un ensemble (fini) d'invités, notés par des lettres ($a$, $b$ etc). Étant donnés deux invités $a$ et $b$, l'assertion « $a \mathbb{G} b$ » se lit « $a$ est assis à gauche de $b$ ». On suppose que la façon dont peuvent s'asseoir les invités est gouvernée par les axiomes suivants :

**Axiome 1.** Pour tout élément $a$, on n'a jamais $a \mathbb{G} a$.

**Axiome 2.** Si $x \mathbb{G} a$ et $x \mathbb{G} b$, alors $a = b$.

**Axiome 3.** Si $a \mathbb{G} x$ et $b \mathbb{G} x$, alors $a = b$.

**Axiome 4.** Pour tout élément $a$, il existe (au moins) un élément $b$ tel que $a \mathbb{G} b$.

Un banquet peut-il ne comporter qu'un seul invité ? Décrire tous les types de banquets à deux, trois et quatre personnes. Montrer que pour tout invité $b$, il existe un invité $a$ tel que $a \mathbb{G} b$. Combien de banquets à cinq personnes existe-t-il ? (Trouver une façon de les compter sans avoir à les décrire en détail.)

**Exercice 7.** Les membres d'une famille s'échangent des cadeaux. Chaque invité a apporté un cadeau et l'offre à une autre personne, de sorte que personne ne reçoive plus d'un cadeau.

Si la famille compte quatre membres, de combien de façons peuvent-ils s'échanger leurs cadeaux ? Comparer cet exercice au précédent, en termes de système d'axiomes.

2. Cet exercice est inspiré de `https://images.math.cnrs.fr/Dobble-et-la-geometrie-finie.html`.