Introduction aux nombres irrationnels

Vocabulaire : fraction, fraction irréductible, nombre rationnel, fraction qui représente un nombre rationnel, égalité de deux nombres rationnels représentés par des fractions.

Un réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

Exercice 1. Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle. Même question pour le produit.

Exercice 2. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 3. Comment obtenir des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ arbitrairement précises, sans calculatrice ?

Exercice 4. Trouver deux irrationnels dont la somme soit rationnelle, et deux irrationnels dont la somme soit irrationnelle. Même question pour le produit.

Exercice 5.

1. Montrer que si p est premier, $\sqrt{p}$ est irrationnel. [1]
2. Si n est un entier quelconque, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{n}$ soit un rationnel.

Exercice 6. [Indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$]

1. Soient a, b, a' et b' des rationnels tels que
$$a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}.$$
Montrer que $a = a'$ et $b = b'$.
2. Soient a, b, c, a', b' et c' des rationnels tels que
$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3}.$$
Montrer que $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.
3. Discuter de la manière de généraliser ce résultat, puis démontrer le résultat général.

Exercice 7. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel. Même question pour $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

Exercice 8. Montrer que le nombre e, vu comme limite de $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, est irrationnel. Pour cela, utiliser la suite auxiliaire $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

Exercice 9.

1. Développer et simplifier $(2+\sqrt{3})^2$, $(2+\sqrt{3})^3$ puis $(2+\sqrt{3})^4$, et calculer leur partie entière à l'aide d'une calculatrice ou mieux, sans calculatrice.
2. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) d'entiers telles que
$$(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3},$$
qui vérifient de plus que pour tout entier $n \geq 0$, on a $3b_n^2 = a_n^2 - 1$. Calculer les premières valeurs prises par ces deux suites.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$, notée $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$, est un entier impair.

---

1. On pourra adapter la preuve précédente, ou bien utiliser la notion suivante : si n est un entier et p est premier, on note $v_p(n)$ le « nombre de fois que p est en facteur à l'intérieur de n ». On appelle $v_p(n)$ la valuation p-adique de n. Par exemple, pour $n = 360 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$, on a $v_2(n) = 3$, $v_3(n) = 2$, $v_5(n) = 1$, et si p est un nombre premier distinct de 2, 3 et 5, on a $v_p(360) = 0$.