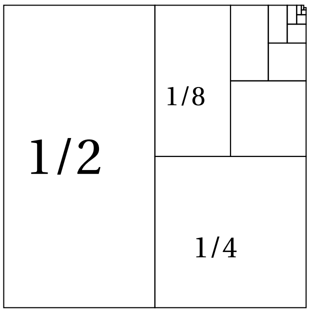
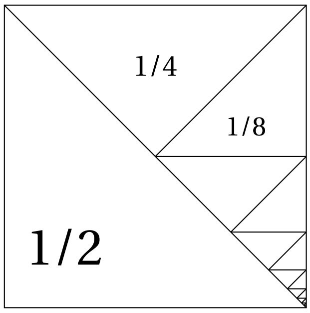
Séries (sommes infinies)

Exercice 1. [Une série géométrique] On considère la suite $u_0 = 1$, $u_1 = 1 + \frac{1}{2}$, $u_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ etc. Le n-ème terme de cette suite est donc égal à :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Que semblent montrer les deux illustrations suivantes ?

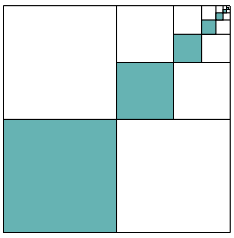


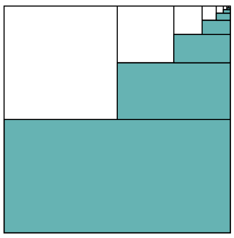


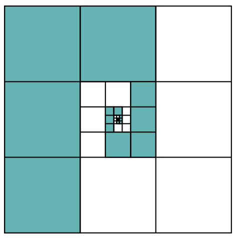
Donner une formule simple pour u_n uniquement en fonction de n et sans « $\cdots$ » ni symbole « $\sum$ », et en déduire une démonstration du résultat deviné grâce aux dessins.

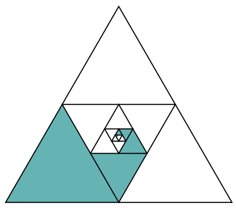
Plus généralement, si a est un nombre réel, est-ce que $1 + a + a^2 + \cdots a^n$ converge vers une limite ? Si oui, laquelle ?

Exercice 2. [D'autres séries géométriques] Quelles convergences de séries géométriques sont illustrées par les figures suivantes ?









Inventer d'autres illustrations semblables. Si $0 < a < 1$ est un nombre rationnel, comment illustrer la convergence de $1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n$?

Noter qu'un argument de symétrie ou d'égalité de parties peut parfois donner la somme directement, sans utiliser la formule, par exemple, pour le colimaçon, la partie blanche est égale à la partie bleue et leur union est le carré. Dans le triangle, on voit qu'on peut former trois spirales disjointes dont l'union est le triangle. Exploiter ceci dans le corrigé.

Exercice 3. [La série harmonique] Dans cet exercice, on s'intéresse à la « série harmonique », c'est-à-dire à la suite

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1 + \frac{1}{2},\ u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},\ u_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \cdots \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Si l'on calcule un grand nombre de termes de cette suite à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, on peut avoir l'impression (fausse) que cette suite finit par se stabiliser et converge vers une limite. Cependant il n'en est rien : les valeurs continuent en fait à augmenter inexorablement et finissent par dépasser n'importe quelle valeur, avec assez de patience. Dans cet exercice, on propose de démontrer ce résultat, appelé *la divergence de la série harmonique*.

Montrer que la différence entre u_{2n} et u_n est toujours au moins de $\frac{1}{2}$, quelque soit n. En déduire le résultat. Bonus : donner un n pour lequel on est certain que u_n est supérieur à 10.

Exercice 4. [Mieux que la tour de Pise] On empile des dominos identiques (de 10cm de long, mettons) les uns sur les autres, en faisant dépasser à chaque fois les dominos sur leur droite.

1. Avec deux dominos, on peut peut placer le domino supérieur de sorte à obtenir une longueur de 15cm. Avec trois dominos, jusqu'où peut-on aller ?
2. Utiliser l'exercice précédent pour expliquer comment, étant donnée une longueur l fixée à l'avance, on peut empiler un certain nombre de dominos (indice : vraiment beaucoup !) d'une certaine façon de sorte que l'édifice atteigne une longueur au moins égale à l en conservant son équilibre.

Exercice 5. [Série harmonique alternée] Dans cet exercice, on s'intéresse à la « série harmonique alternée », c'est-à-dire à la suite

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1 - \frac{1}{2},\ u_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3},\ u_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4},\ \text{etc.}$$

1. Trouver une formule pour u_n en fonction de n, en s'autorisant les « $\cdots$ », ou bien le symbole « $\sum$ ».
2. Montrer que la suite converge vers une limite (sans chercher à calculer cette limite). On peut calculer plusieurs termes pour avoir une idée de ce qui se passe.

La limite est égale au logarithme de deux : ln(2), mais c'est une autre histoire !

Exercice 6. Pour $n \geq 1$, on considère la somme $S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Calculer quelques termes et essayer de prouver par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a $S_n \leq 1$.
2. Prouver par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ et en déduire que S_n converge vers une limite.
3. Chercher une autre preuve du point précédent.

Exercice 7. [Croissante et majorée] Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et vérifie de plus $u_n \leq 10$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 8. [Le nombre e] Si n est un entier naturel non nul, on note $n!$ et on appelle *factorielle de n* l'entier $1 \times 2 \times \cdots \times n$.

1. Calculer 1!, 2!, 3! et 4!.
2. Montrer que la suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ converge vers une limite, par exemple en utilisant l'exercice précédent.
3. En utilisant la suite auxiliaire $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$, redémontrer le résultat de la question précédente, et montrer que la limite n'est pas nombre rationnel.

(Remarque : la limite de la suite (u_n) est le célèbre nombre e.)

Exercice 9. [Une série de Riemann] Dans cet exercice on considère la suite

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1 + \frac{1}{4},\ u_3 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9},\ \ldots u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Ceci montre que la somme $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ tend vers une certaine limite inférieure ou égale à deux. Leonhard Euler a démontré en 1735 que cette limite, aussi notée $\zeta(2)$, vaut exactement $\pi^2/6$. Si on remplace les carrés par des cubes, on obtient une autre limite, notée $\zeta(3)$, la constante d'Apéry, dont on ne sait étonnamment pas grand chose sinon qu'elle n'est pas rationnelle (théorème d'Apéry, 1978).