

Raisonnement par analyse-synthèse (conditions nécessaires et suffisantes)

Exercice 1. Trouver tous les entiers naturels x tels que $(x+2)(x-3) = -4$. Si possible, utiliser plusieurs méthodes différentes.

Exercice 2. Trouver tous les entiers relatifs x tels que :

1. $x^2(x+1) = 17$;
2. $x^2(x+1) = 12$;
3. $2x^3 + 5x^2 - x + 3 = 0$;
4. $2x^3 + 9x^2 + 7x = 6$.

Exercice 3. Déterminer les réels x tels que les équations suivantes aient un sens bien défini, et soient vraies. Faire un dessin dans chaque cas.

1. $\sqrt{2-x} = x$;
2. $3\sqrt{1-x} = x-3$;
3. $3\sqrt{x} = 2+x$.

Exercice 4. Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux cercles sécants de rayons différents. Déterminer l'ensemble des centres des cercles tangents extérieurement à la fois à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Exercice 5. On donne un cercle \mathcal{C} de centre O , et M un point hors de \mathcal{C} . Combien y a-t-il de tangentes à \mathcal{C} passant par M ? Les construire à la règle et au compas.

Exercice 6. Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites parallèles distinctes, et A un point hors de ces droites. Construire deux points M et N tels que AMM' soit rectangle isocèle en A , et que le point M (respectivement M') soit sur la droite \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}'), et préciser le nombre de solutions possibles.

Même question avec un triangle non plus isocèle rectangle mais équilatéral.

Exercice 7. Déterminer toutes les applications f de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} telles que pour tout couple (p, q) d'entiers relatifs, on ait $f(p+q) = f(p) + f(q)$.

Exercice 8. Déterminer tous les réels x tels que $|x+1| = 2x+3$.

Exercice 9. Déterminer les réels x tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $x^{n+2} \leq x^{n+1} + x^n$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'elle est *paire* si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = f(x)$. On dit qu'elle est *impaire* si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

1. Déterminer les fonctions à la fois paires et impaires.
2. (Exemples) Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont paires? Impaires?

$$x \mapsto -2x; \quad x \mapsto x^2 + 1; \quad x \mapsto x^2 + x; \quad x \mapsto 3|x|$$

Tracer leurs graphes. Comment interpréter la parité ou l'imparité d'une fonction?

3. Démontrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, et que cette écriture est unique.
4. Préciser la décomposition pour $x \mapsto x^3 + 2x^2 + x + 1$, ainsi que de $x \mapsto |x-1|$ (tracer le graphe de cette dernière).

Exercice 11. Trouver toutes les fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant la condition suivante :

$$\text{Pour tous réels } x \text{ et } y, \text{ on a } f(xy) = xf(x) + yf(y).$$

Exercice 12. Trouver toutes les fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant la condition suivante :

$$\text{Pour tout réel } x, \text{ on a } f(x) - 1 = x - xf(x-1)$$

Exercice 13. Trouver toutes les fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant la condition suivante :

$$\text{Pour tous réels } x \text{ et } y, \text{ on a } f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$