Carrés et sommes de carrés

Dans cette feuille, on explore quelques propriétés des carrés d'entiers. Ce thème en apparence très simple conduit jusqu'à des théorèmes célèbres et difficiles de Fermat, Euler et Lagrange.

Activités préparatoires : calculer les premiers carrés (ceux inférieurs à 200), écrire les nombres premiers inférieurs à 100 et enfin factoriser quelques entiers, par exemple 132.

Exercice 1. Calculer les sommes des premiers nombres impairs, autrement dit :

$$1, \quad 1+3, \quad 1+3+5, \quad 1+3+5+7 \quad \text{etc.}$$

Que remarque-t-on? Conjecturer une formule générale pour la somme des n premiers nombres impairs, puis démontrer le résultat.

Exercice 2. Calculer les sommes des premiers entiers élevés au cube, autrement dit : 1^3, 1^3+2^3, $1^3+2^3+3^3$ etc. Que remarque-t-on? Démontrer le résultat général.

Exercice 3. [Différences de carrés] Tous les entiers sont-ils une différence de deux carrés? Lorsqu'ils le sont, de combien de façons différentes? (Et aussi : tous les entiers sont-ils différence de deux carrés de rationnels? Cette question est bien sûr plus faible.)

⋆ ⋆ ⋆

Un entier naturel n est somme de deux carrés *s'il peut s'écrire sous la forme $n = a^2 + b^2$, où a et b sont des entiers naturels. Par exemple,* 5 *et* 13 *sont somme de deux carrés, puisque* $5 = 1^2 + 2^2$ *et* $13 = 2^2 + 3^2$. *Les entiers a et b peuvent être nuls, donc* 0, 1, 4 *sont également considérés comme somme de deux carrés, puisque* $0 = 0^2 + 0^2$, $1 = 0^2 + 1^2$ *et* $4 = 0^2 + 2^2$. *Dans la suite, on essaye de comprendre quels sont les entiers qui sont somme de deux carrés. Cette question a de nombreuses ramifications même en-dehors de l'arithmétique.*

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 4. Parmi les entiers inférieurs à 20, lesquels sont somme de deux carrés?

Exercice 5. Si on donne un entier naturel n, y a-t-il une méthode pour déterminer si oui ou non il est somme de deux carrés? Par exemple, est-ce que 74 est somme deux carrés?

Exercice 6. Parmi les entiers naturels inférieurs à 40, lesquels sont somme de deux carrés? On conseille de faire un tableau pour visualiser les résultats expérimentaux et plus spécifiquement, un tableau à quatre colonnes comme ci-dessous :

$0 = 0^2 + 0^2$	$1 = 1^2 + 0^2$	$2 = 1^2 + 1^2$	3 : non
$4 = 0^2 + 2^2$	$5 = 1^2 + 2^2$	6 : non	7 : non
$\vdots$			$\vdots$

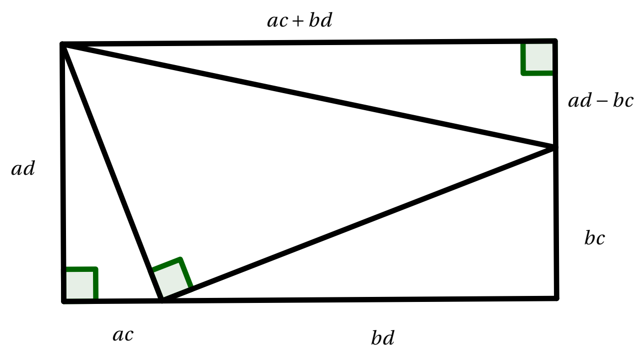
Peut-on formuler certaines conjectures? Existe-il des entiers qui sont somme de deux carrés de deux façons différentes?

Exercice 7. Montrer qu'il existe une infinité de nombres qui sont somme de deux carrés.

Exercice 8. [La quatrième colonne] Soit n un entier dont la division par quatre donne un reste de 3 (on dit aussi que « n est congru à 3 modulo 4 »). Autrement dit, n est de la forme $4k+3$, comme le sont par exemple 3, 7, 11, 15, 19 etc. Montrer que ce nombre n ne peut pas être la somme de deux carrés.

Exercice 9. [Identité de Diophante] L'objectif de l'exercice est de démontrer que si deux nombres m et n sont somme de deux carrés, leur produit mn aussi (et deux sommes différentes sont possibles). On propose deux preuves, une calculatoire et une géométrique.

1. (Preuve calculatoire) Compléter les deux égalités suivantes :
$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + ???$$
et :
$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ad+bc)^2 + ???$$
En déduire le résultat.
2. (Preuve géométrique) Si $ad > bc$, considérer la figure suivante et en déduire une preuve de la première égalité ci-dessus. Inventer une preuve géométrique pour la seconde égalité.



Exercice 10. [Application de l'exercice précédent]

1. Les entiers 17 et 53 sont des sommes de deux carrés : préciser lesquels. En déduire que $17 \times 53 = 901$ est une somme de deux carrés et expliciter deux écritures distinctes comme sommes de deux carrés.
2. Écrire 65 comme somme de deux carrés, là aussi de deux manières distinctes.
3. Plus généralement, parmi les entiers inférieurs à 100, lesquels sont forcément des sommes de deux carrés ?

Exercice 11. Soit p un nombre premier. En expérimentant, formuler une conjecture sur la condition à laquelle p est une somme de deux carrés. La somme semble-t-elle unique ?

La réponse définitive au problème des deux carrés est donnée par les deux théorèmes suivants, hors de portée pour l'instant mais sur lesquels on reviendra au cours de l'année :

Théorème 0.1. Un nombre premier p est somme de deux carrés si et seulement sil est congru à 1 modulo 4.

Exercice 12. [Application directe] En admettant le théorème, dire rapidement quels sont les nombres premiers inférieurs à 100 qui sont somme de deux carrés.

Pour les nombres composés (c'est-à-dire non premiers), on a le théorème suivant :

Théorème 0.2. Un entier naturel n est somme de deux carrés si et seulement si chacun de ses facteurs premiers congrus à 3 modulo 4 apparaît élevé à une puissance paire.

Exercice 13. En admettant le théorème, déterminer rapidement, parmi les entiers inférieurs à 100, ceux qui sont somme de deux carrés. Noter que le théorème ne permet pas d'obtenir une décomposition *explicite* en carrés. On dit que c'est un théorème *non constructif* : il ne permet pas de construire un objet mathématique qui répond à la question.