Coefficients et racines

Échauffement

Exercice 1. [Somme et produit] Trouver de tête (sans utiliser de trinôme et de discriminant) des nombres entiers relatifs a et b dont :

1. la somme vaut 5 et le produit vaut 4 ;
2. la somme vaut 5 et le produit vaut 6 ;
3. la somme vaut 3 et le produit vaut −4 ;
4. la somme vaut −6 et le produit vaut −7 ;
5. la somme vaut 6 et le produit vaut 8 ;
6. la somme vaut 1 et le produit vaut −6.

Exercice 2. [Dimensions d'un terrain] Trouver les dimensions d'un terrain rectangulaire de périmètre 44 m et d'aire 120 m^2.

Exercice 3. [Mise sous forme canonique] Factoriser la quantité $4X^2 - 8X + 2$ en la mettant sous forme canonique et en déduire ses racines.

Dans les exercices qui suivent, si les racines d'un trinôme ne sont pas calculables de tête, on demande d'utiliser cette méthode et non la formule avec le discriminant, le but étant de se réhabituer à la factorisation directe.

Formules de Viète, fonctions symétriques

Si $X^2 + bX + c$ est un polynôme du second degré unitaire (c'est-à-dire que le coefficient dominant vaut 1) et α et β sont ses racines, on peut donc écrire $X^2 + bX + c = (X - \alpha)(X - \beta)$. En développant le second membre et en identifiant les coefficients, on obtient $\boxed{\alpha + \beta = -b \text{ et } \alpha\beta = c}$. Ce sont les formules de Viète pour les équations du second degré. Si le polynôme n'est pas unitaire, on se ramène au cas unitaire en factorisant par le coefficient dominant a et on trouve $\boxed{\alpha + \beta = -b/a \text{ et } \alpha\beta = c/a.}$

Exercice 4. [Factorisation de tête] Factoriser de tête les expressions suivantes, sans faire de calcul de discriminant :

$$X^2 - 3X + 2, \quad ,X^2 - X - 2, \quad X^2 + 5X + 6, \quad X^2 + 5X - 6, \quad X^2 - X - 6, \quad X^2 - 3X - 4.$$

Exercice 5. [Somme et produit, bis] Trouver deux nombres dont la somme vaut $S = 4$ et le produit vaut $P = 2$.

Exercice 6. [Polynômes symétriques] On considère le polynôme $P = X^2 + 4X - 2$, et on note α et β ses racines. Les formules de Viète donnent donc $S = \alpha + \beta = -4$ et $P = \alpha\beta = -2$. Cet exercice montre comment calculer certaines expressions de α et β sans avoir à calculer ces deux racines.

1. En utilisant les formules de Viète, calculer la quantité $\alpha^2 + \beta^2$ sans calculer α et β, en utilisant uniquement les valeurs de S et P.
2. Même question avec $\alpha^3 + \beta^3$ et $\alpha^4 + \beta^4$, toujours sans chercher à calculer α et β.
3. Calculer finalement les deux racines α et β et vérifier les calculs précédents.

Exercice 7. [Fractions rationnelles symétriques] Notons α et β les deux racines de $P = X^2 + 5X + 3$.

1. Sans chercher à calculer explicitement les racines, montrer que l'expression $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$ est bien définie et la calculer.
2. Même question pour $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$.

Exercice 8. [Systèmes non linéaires] Résoudre les systèmes d'inconnues réelles x et y suivants :

$$\begin{cases} x^2+y^2 & =10 \\ x+y & =4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x^3+y^3 & =9 \\ x+y & =3 \end{cases}$$

Exercice 9. [Systèmes non linéaires, bis] Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système $\begin{cases} x+y+xy & =-1 \\ x^2y+xy^2 & =-6 \end{cases}$

Exercice 10. [Dimensions d'un terrain, bis] Un terrain rectangulaire a une diagonale de 13 mètres et un périmètre de 34 mètres. Déterminer sa longueur et sa largeur.

Un peu d'arithmétique

Exercice 11. [Racines entières et rationnelles] Soit $P(X)=aX^2+bX+c$ un polynôme du second degré à coefficients entiers.

1. Montrer que si P admet une racine rationnelle, son autre racine est également rationnelle.
2. Montrer que cette affirmation est fausse pour les racines entières.
3. Montrer que si P est unitaire, c'est-à-dire que le coefficients dominant a vaut 1, alors dans ce cas, si une racine est entière, l'autre l'est également.

Exercice 12. [Racines entières et divisibilité]

1. Soit $P(X)=aX^2+bX+c$ un polynôme du second degré à coefficients entiers. Montrer que si α est une racine entière de P, alors α divise c.
2. (Application) Déterminer les racines entières de $X^2-2X-63$.
3. (Application) Déterminer les racines entières de X^2-X-63.
4. (Application) Déterminer les racines entières de $2X^2-5X+2$.
5. Le cas échéant, déterminer les racines non entières des polynômes précédents.

Exercice 13. [Racines rationnelles et théorème d'Euler-Gauss]

1. Soit $P(X)$ un trinôme à coefficients entiers de la forme $P(X)=X^2+aX+b$. Montrer que si $\alpha=\dfrac{p}{q}$ est une racine rationnelle de P, alors α est en fait un entier !
2. (Application) Le polynôme X^2-2X-1 admet-il des racines rationnelles et si oui lesquelles ?

Exercice 14. [Condition sur un paramètre]
Pour quels valeurs entières du paramètre m le polynôme X^2+mX+3 admet-il des racines rationnelles ? Et si m est un rationnel ?

Exercice 15. [Polynômes non unitaires]

1. Soit $P(X)=aX^2+bX+c$ un polynôme à coefficients entiers. Montrer que si $\alpha=\dfrac{p}{q}$ est une racine rationnelle de P, alors q divise le coefficient dominant a, et p divise le dernier coefficient c.
2. (Application) Le polynôme $X^2+\dfrac{13}{14}X+\dfrac{3}{14}$ admet-il des racines rationnelles et si oui lesquelles ?
3. (Application) Plus généralement, déterminer tous les entiers m tels que $X^2+\dfrac{m}{14}X+\dfrac{3}{14}$ admette des racines rationnelles.

Indications

Exercice 9. Il y a quatre couples de solutions.