Autour des valeurs intermédiaires

Considérons les deux questions suivantes :

— On remplit d'eau une bouteille vide de contenance d'un litre. Montrer qu'il existe un instant où la bouteille contient exactement un demi-litre d'eau.

— Un train part de Paris et arrive à Nancy une heure et demie après. Montrer qu'il existe un instant où il se trouve à exactement 100 kilomètres de Nancy.

Ces deux questions ont l'air évidentes, mais elles cachent une hypothèse sur la façon dont on modélise le mouvement du train, et le remplissage de la bouteille. Ces phénomènes sont modélisés par des fonctions mathématiques, et ces fonctions sont implicitement supposées **continues**. Ceci signifie entre autres que les valeurs ne « sautent » pas. Dans le cas du train, cela signifie concrètement que le train n'a pas la capacité de se téléporter d'un point à un autre : son mouvement doit être *continu*. Si le train pouvait se téléporter une seule fois ne serait-ce que d'un kilomètre, alors il pourrait attendre d'être à 100,5 kilomètres de Nancy, se téléporter un kilomètre plus loin, donc se retrouver brutalement à 99,5 km de Nancy puis continuer son chemin, sans jamais se trouver exactement à 100 km de Nancy. Mais ce comportement est implicitement exclu, et la distance à Nancy doit forcément valoir 100 km à un moment. (Au moins une fois : on peut en effet imaginer que le train fasse machine arrière pour une raison quelconque, puis reparte.)

C'est la même chose pour la bouteille d'eau : le remplissage est continu, et donc la quantité d'eau doit forcément passer par la valeur 0,5 L.

Ce qui est implicite et assez difficile est qu'une fonction continue vérifie ce qu'on appelle la *propriété des valeurs intermédiaires*. Cette affirmation constitue le *théorème des valeurs intermédiaires*, que voici :

Théorème 0.1 (des valeurs intermédiaires)**.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $h \in [f(a), f(b)]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = h$.

Malgré les apparences, ce théorème est très loin d'être évident. Sa démonstration est longue, en général admise au lycée, et nécessite au minimum la définition précise de ce qu'est la continuité (définition non donnée ici) et surtout de ce que sont vraiment les nombres réels. Ici, on *admet* le théorème, l'objectif étant de se familiariser avec son utilisation dans des contextes un peu ludiques.

Il est intéressant d'étudier en détail de quelle façon le théorème est appliqué dans les deux cas précédents.

1. Dans le premier cas, le théorème est appliqué avec $a = t_0$, $b = t_1$ les temps de début et d'arrêt du remplissage, et f la fonction qui mesure la quantité d'eau dans la bouteille au cours du temps. On la suppose **continue**, pour les raisons expliquées plus haut. On a donc $f(t_0) = 0$, et $f(t_1) = 1$. Si maintenant on prend $h = 0,5$ (on peut car h est bien compris entre $f(a)$ et $f(b)$), le théorème affirme qu'il existe un temps $c \in [t_0, t_1]$ tel que $f(c) = 0,5$, autrement dit il existe bien un moment où la bouteille est exactement remplie à la moitié. Noter qu'on aurait pu appliquer le théorème avec une autre valeur de h. Par exemple, il existe aussi un moment où la bouteille est remplie aux deux tiers.

2. Dans le deuxième cas, le théorème est appliqué avec $a = t_0$ et $b = t_1$ les temps de départ et d'arrivée du train, et f la distance du train à Nancy. On suppose cette fonction **continue**, pour les raisons expliquées plus haut. La valeur $f(t_0)$ est la distance de Paris à Nancy, donc plus de 300 km : $f(t_0) \geq 300$. D'autre part, $f(t_1) = 0$ (à l'arrivée, le train est à distance 0 de Nancy). Considérons alors $h = 100$. On a bien $100 \in [f(a), f(b)]$, donc on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe un temps c tel que $f(c) = h = 100$, autrement dit il existe un moment où le train est exactement à 100 km de Nancy.

Les exercices suivants peuvent sembler tout autant évidents. On demande de traduire leurs énoncés en termes mathématiques, et de proposer une preuve détaillée dans un langage mathématique, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires et en précisant bien la manière dont on l'utilise.

Exercice 1. Un train part de Paris et arrive à Nancy une heure et demie après. Montrer qu'il existe un instant où il se trouve à exactement 300 kilomètres de Strasbourg.

Exercice 2. Deux voitures s'élancent sur un circuit, la voiture A étant en « pole position ». Au bout d'une minute, la voiture B est devant A. Montrer que les deux voitures se sont croisées au moins une fois.

Exercice 3. Un même train est à quai en gare de Nancy à 8h ainsi qu'à 18h. Entre-temps, on ne sait pas ce qu'a fait le train mais il n'a pu se déplacer que sur la voie ferrée que l'on peut assimiler à une ligne droite. Montrer qu'entre 8h et 18h, il y a deux autres moments où le train était exactement au même endroit (pas forcément la gare).

Les exercices qui suivent demandent d'appliquer le théorème à plusieurs fonctions, ou de manière astucieuse.

Exercice 4. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer qu'elle admet un **point fixe**, autrement dit montrer qu'il existe un réel $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 5. Une voiture parcourt un circuit parfaitement circulaire. Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés du circuit qui sont à la même altitude.

Exercice 6. Aline part de chez elle à huit heures du matin. Après une longue journée de travail, elle quitte son lieu de travail à huit heures du soir et rentre chez elle par le même chemin qu'à l'aller.

Montrer que sur le chemin du retour, il y aura au moins un moment où sa montre indiquera la même heure qu'au même endroit le matin, c'est-à-dire qu'elle sera exactement au même endroit que douze heures plus tôt.

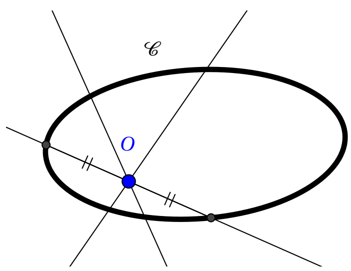
Exercice 7. Des amis font une randonnée en montagne (ne jamais partir seul(e) en randonnée !). La randonnée est une boucle qui dure trois heures. Montrer qu'à un certain moment, ils sont exactement à la même altitude qu'une heure auparavant.

Exercice 8. Cet exercice est une généralisation du précédent. Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $h(0) = h(1)$, et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. Montrer qu'il existe a tq $h(a) = h(a + 1/n)$. L'énoncé plus haut est le cas particulier $n = 3$.

Exercice 9. Montrer que dans la salle de conférences de l'IECL il existe à chaque instant deux points distincts où la température est la même. Même question pour une infinité de points.

Exercice 10. Montrer que sur la Terre il existe à chaque instant deux endroits du globe diamétralement opposés où la température est la même. (En fait, montrer qu'il existe une infinité de tels couples de points.)

Exercice 11. Le boulevard périphérique de Paris (ou « Périph' ») est une voie rapide qui fait le tour de la ville de façon plus ou moins circulaire. Montrer qu'il existe une droite passant par la tour Eiffel et coupant le Périph en deux points équidistants de la tour Eiffel.



Exercice 12. On pose une table à quatre pieds sur un sol cabossé. Montrer qu'il est possible de tourner la table jusqu'à ce que les quatre pieds soient au contact du sol !