Combinatoire élémentaire

La combinatoire est une branche importante et très belle des mathématiques. Elle se subdivise en plusieurs spécialités : combinatoire algébrique, probabiliste, analytique, arithmétique etc.

Cette feuille est une introduction à la combinatoire élémentaire. Elle permet de faire connaissance avec les notions fondamentales en combinatoire : énumération d'objets, cardinal, permutations, partitions, coefficients binomiaux. (Dans une feuille ultérieure, on découvrira la théorie des *séries génératrices*.)

Exercice 1. Alice et Maxime jouent aux poker avec un jeu de 52 cartes (qui sont de 4 *couleurs* et 13 *valeurs* possibles). Les mains consistent en 5 cartes. Combien de mains y a-t-il ? Combien y a-t-il de quintes flush royales, de quintes flush, de carrés, de full houses, de brelans ?

Exercice 2. Alice et Maxime réorganisent leur bibliothèque qui contient n livres.

1. Ils ne sont pas d'accord sur l'ordre dans lequel les ranger (Alice voudrait les ranger dans l'ordre chronologique de première publication alors que Maxime voudrait les classer par ordre lexicographique du corps du texte). Ils décident finalement de les ranger dans un ordre quelconque. De combien de manières peuvent-ils le faire ?
2. À la réflexion, il y a tout de même trois livres particuliers qu'ils aimeraient voir rangés côte à côte. Combien de choix ont-ils ?
3. Finalement, ils se soumettent à l'ordre moral dominant et décident de ranger ensemble les livres de chaque auteur ou autrice [1]). Leurs n livres ont été écrits par k auteurs (il y a n_i livres du i-ème auteur). Combien de choix ont-ils ?

Exercice 3. Alice doit partir un an en stage à New York, ville dont les rues et avenues se croisent à angle droit à intervalles réguliers et dont le plan est assimilable à une grille. Elle doit se rendre tous les jours de son logement à son travail, ce qui correspond à aller du point de coordonnées $(0,0)$ au point $(4,5)$. Peut-elle emprunter un chemin différent tous les jours pendant un an ? (On évitera les détours inutiles : le chemin dit être de « longueur » 9.)

Exercice 4. Alice doit distribuer des bonus à certains de ses traders. Elle doit répartir n cadeaux (tous identiques) à k employés distincts. Combien y a-t-il de possibilités ? (Certains employés peuvent ne rien recevoir du tout et on doit distribuer l'intégralité des n cadeaux.) Quel est le rapport avec l'exercice précédent ?

Exercice 5. Alice doit à nouveau distribuer des bonus à ses traders mais la dernière fois, ils n'étaient pas satisfaits de la distribution. Maxime lui conseille de partager les n cadeaux en un certain nombre de lots et de laisser les traders se battre entre eux pour les lots. L'objectif est d'étudier le nombre de partages possibles, au niveau de la conception des lots.

En reformulant, si $n > 0$, on note $p(n)$ le nombre de façons d'écrire n comme la somme d'un certain nombre d'entiers strictement positifs. (Et par convention, $p(0) = 1$.) Par exemple, $p(3) = 3$ car on peut décomposer 3 de trois façons différentes : 3, $1+2$ et $1+1+1$.

1. Calculer $p(n)$ pour $n \leq 6$.
2. Chercher une formule récursive permettant de calculer $p(n)$ de proche en proche. Pour cela, on pourra par exemple commencer par calculer $p_k(n)$, le nombre de partages en k parts non nulles.

On reviendra sur cet exercice dans une prochaine feuille, en utilisant des séries génératrices.

1. Voir `https://www.slate.fr/story/156221/feminisation-metiers-pouvoir`.

Exercice 6. Maxime veut offrir un collier à Alice. Il peut acheter des perles de deux couleurs différentes, dans la quantité souhaitée. Combien de colliers vraiment différents à n perles peut-il concevoir ? (Le fermoir doit être placé derrière le cou, mais on peut retourner le collier pour le porter « dans l'autre sens ».)

Note : si on peut de plus faire « tourner » le collier (par exemple si le fermoir est invisible), l'exercice devient vraiment difficile et nécessite des connaissances d'arithmétique (groupes cycliques et indicatrice d'Euler). Dans une prochaine feuille !

Exercice 7. Alice et Maxime se marient. Tous les convives, au nombre de n, seront placés autour d'une grande table circulaire.

1. Combien de plans de table sont possibles ?
2. Et si Alice et Maxime doivent être placés côte à côte ?
3. Et si on veut alterner filles et garçons (en supposant que ce soit possible) ?

Exercice 8. Alice et Maxime cherchent à faire la place dans leur appartement (voir exercice suivant) en donnant des livres à leurs amis. Ils ont n livres (tous différents) à donner et décident de faire des lots que leurs amis se partageront comme ils le voudront. Combien y a-t-il de manières de concevoir les lots ?

En reformulant, si X est un ensemble de cardinal n, on cherche le nombre de partitions de cet ensemble (en parties non vides).

Exercice 9. Alice et Maxime choisissent un prénom pour leur premier enfant.

Ils décident d'utiliser les lettres suivantes : a, e, g, i, l, l, m, u, u. Combien d'anagrammes y a-t-il sur ces neuf lettres ?

(Note : on peut reformuler la réponse en termes de *coefficients multinomiaux*, des généralisations des coefficients binomiaux.)

Exercice 10. Maxime apprend la division à l'ENS. Enthousiasmé, il essaye de faire plusieurs divisions de suite et écrit « $a \div b \div c$ ». Son professeur Cédric Villani lui fait remarquer que cette expression n'est pas bien définie : elle peut signifier « $(a \div b) \div c$ », ou bien « $a \div (b \div c)$ » et le résultat peut varier suivant l'ordre de priorité choisi pour effectuer les divisions. (En langage savant, on dit que la division n'est pas *associative* : les divisions successives doivent être parenthésées pour avoir un sens.)

Au lieu de finir l'exo, Maxime se demande alors de combien de façons on peut parenthéser une suite ordonnée de symboles « $a_0\ a_1\ \dots\ a_n$ ». Ce nombre de parenthésages est noté C_n dans la suite. On a vu que $C_2 = 2$, en effet la suite ordonnée de symboles « $a_0\ a_1\ a_2$ » peut être parenthésée de deux façons : $(a_0 a_1) a_2$ ou bien $a_0 (a_1 a_2)$.

1. Montrer que $C_3 = 5$, et calculer C_4.
2. Trouver une formule de récurrence permettant de calculer les nombres C_n.

Les thèmes abordés dans cette feuille sont les suivants : nombre de partitions d'un entier, nombres de Bell, nombres de Catalan. Sur les nombres de Catalan, on conseille la vidéo suivante : `https://www.youtube.com/watch?v=aqQjrHeHXP4` (qui va assez loin : certains de ces points seront développés dans des séances ultérieures).

Indications

Exercice 5. On pourra démontrer que l'on a la formule $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$.