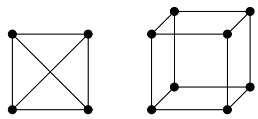
Graphes planaires et formule d'Euler

Définition 0.1. Soit G un graphe. Une *représentation planaire* de G est un dessin du graphe dans le plan (les arêtes sont des chemins continus reliant les sommets) vérifiant la propriété suivante : les dessins d'arêtes ne s'intersectent pas (dans le plan).

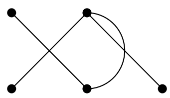
Un graphe peut ne pas avoir de représentation planaire et s'il en a, il en a plusieurs.

Un graphe est dit *planaire* s'il possède au moins une représentation planaire.

Exercice 1. Trouver des représentations planaires des graphes suivants :



Exercice 2. Montrer qu'un arbre (*i.e.* un graphe sans circuit fermé) est toujours un graphe planaire.



Exercice 3. [Faces d'une représentation planaire] Soit $\mathcal{G}$ un graphe planaire connexe. On fixe une représentation planaire de ce graphe. Une *face* de cette représentation planaire est une des régions du plan délimitées par le dessin du graphe.

Étant donné une face F, son *bord* est le plus court chemin fermé passant par toutes les arêtes qui touchent la face (le bord peut avoir à parcourir certaines arêtes plusieurs fois.)

Le *degré d'une face* est la longueur de son bord. Montrer que la somme des degrés de toutes les faces est égal au double du nombre d'arêtes :

$$\boxed{\sum_{F \text{ face}} \deg(F) = 2a}$$

(En particulier, ce nombre ne dépend pas de la représentation planaire choisie !)

Exercice 4. [La formule d'Euler] Soit G un graphe planaire connexe, dont on fixe une représentation planaire. On note f le nombre de faces de G, s le nombre de sommets et a le nombre d'arêtes. Montrer la formule d'Euler :

$$\boxed{s - a + f = 2}$$

Une autre interprétation de ce résultat est que le nombre f de faces ne varie pas quelque soit la représentation planaire choisie : il vaut toujours $2 + a - s$.

Exercice 5. Est-il possible que dans un pays, il existe cinq villes toutes reliées aux quatre autres par des routes différentes qui ne se croisent pas ?

Exercice 6. [Énigme des trois maisons et usines] Un lotissement de trois maisons doit être équipé d'eau de gaz et d'électricité. Pour cela, chacune des trois maisons doit être directement reliée par une canalisation à trois usines (centrale électrique, usine de production d'eau potable et usine à gaz[1]).

La règlementation interdit de croiser les canalisations pour des raisons de sécurité. Est-ce possible et si oui comment faut-il faire ?

1. D'après Wikipédia, la dernière usine à gaz française a fermé en 1971 : on exploite maintenant le gaz naturel, au lieu de produire du gaz à partir du charbon.

Exercice 7. (Conditions nécessaires pour être planaire) Soit G un graphe connexe planaire à $s \geq 3$ sommets. Montrer en utilisant la formule d'Euler que :

1. $a \leq 3s-6$ (et $f \leq 2s-4$).
2. Il existe au moins un sommet de degré ≤ 5. (On ne peut pas remplacer 5 par 4 : trouver un exemple de graphe planaire dont tous les sommets sont de degré 5.)
3. S'il n'y a pas de cycles de longueur 3, alors $a \leq 2s-4$.
4. Plus généralement, s'il n'y a pas de cycle de longueur $\leq r$, alors :

$$a \leq \frac{r}{r-2}(n-2).$$

Ceci donne des conditions nécessaires de planéité, mais ne permet pas de montrer la planéité.

Ces conditions disent que dans un graphe planaire, le nombre d'arêtes est relativement faible. (Comparer avec un graphe complet où il y a $s(s+1)/2$ arêtes.)

Exercice 8. (Ballon de football) Un ballon de football est fabriqué en cousant ensemble des pièces de cuir. Traditionnellement, il s'agit de pentagones et d'hexagones. Montrer que c'est impossible en n'utilisant que des hexagones (si l'on exclut l'assemblage de deux hexagones identiques l'un sur l'autre).

Exercice 9. (Coloriages de cartes) On considère une carte représentant plusieurs pays. On désire colorier la carte, c'est-à-dire colorier chaque pays de façon à ce que deux pays limitrophes n'aient pas la même couleur.

1. Montrer par récurrence qu'il suffit de six couleurs pour colorier n'importe quelle carte.
2. En affinant la fin du raisonnement, montrer qu'il suffit en fait de cinq couleurs.

En réalité, il suffit de quatre couleurs, c'est le célèbre *théorème des quatre* couleurs. Mais la preuve de ce résultat est *très* difficile et se termine par la vérification de plusieurs centaines de cas particuliers à l'aide d'un ordinateur. Il n'y a pas de preuve élégante connue pour l'instant.

Exercice 10. Dans un pays, on désire réorganiser les voies de communication entre les 11 plus grandes villes. Elles doivent être reliées deux à deux soit par un canal, soit par une voie de chemin de fer. Or les ingénieurs du pays, s'ils savent parfaitement faire passer une voie ferrée au-dessus d'un canal, ne savent pas faire passer une voie ferrée au-dessus d'une autre, ni un canal au-dessus d'un autre !

Est-il possible de résoudre le problème ? (On peut placer les villes comme on le désire.)

Exercice 11. (Polyèdres combinatoirement réguliers)

Un polyèdre est la donnée d'un ensemble de polygones, les *faces*, et d'une façon de recoller dans l'espace les faces le long de leurs bords.

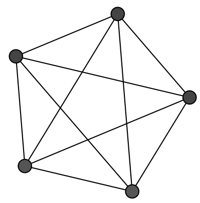
Un polyèdre est **combinatoirement régulier** si le graphe formé par les sommets et les arêtes est un graphe connexe planaire, dont tous les sommets sont de même degré, et dont toutes les faces sont également de même degré. (Les degrés des sommets peuvent être différents des degrés des faces.) Par exemple, un parallélépipède rectangle, bien que non régulier, est combinatoirement régulier (son graphe est le même que celui d'un cube).

Montrer qu'un polyèdre convexe combinatoirement régulier dont les sommets sont de degré ≥ 3 a obligatoirement des faces de degré ≤ 5, et qu'il est combinatoirement équivalent à un des solides de Platon.

Indications

Exercice 2. On pourra procéder par récurrence sur le nombre de sommets du graphe, ou bien construire une représentation planaire explicite en donnant les coordonnées des points et les chemins pour les relier.

Exercice 3. Penser à la somme des degrés des sommets.
Exercice 5. Non, c'est impossible. Le graphe à considérer est K_5, le graphe complet sur cinq sommets, donc voici une représentation (non planaire).



Il s'agit de montrer que ce graphe n'est pas planaire.
Exercice 8. Montrer qu'il existe au moins une face de degré ≤ 5, et qu'il existe au moins un sommet de degré ≥ 3.
Exercice 9. 1)Procéder par récurrence et utiliser un des résultats précédents pour l'hérédité.

2) Procéder par récurrence comme dans la question précédente. Par contre, au moment de rajouter le sommet supplémentaire, il faut modifier le coloriage précédent d'une certaine façon pour justifier que cinq couleurs suffisent toujours.
Exercice 10. L'idée est qu'un graphe complet a « beaucoup » d'arêtes, alors que des graphes planaires n'ont que « peu » d'arêtes.