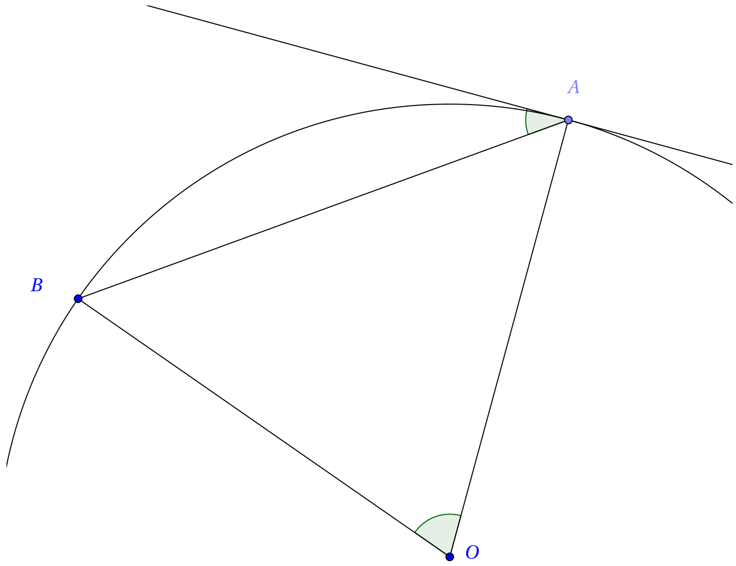
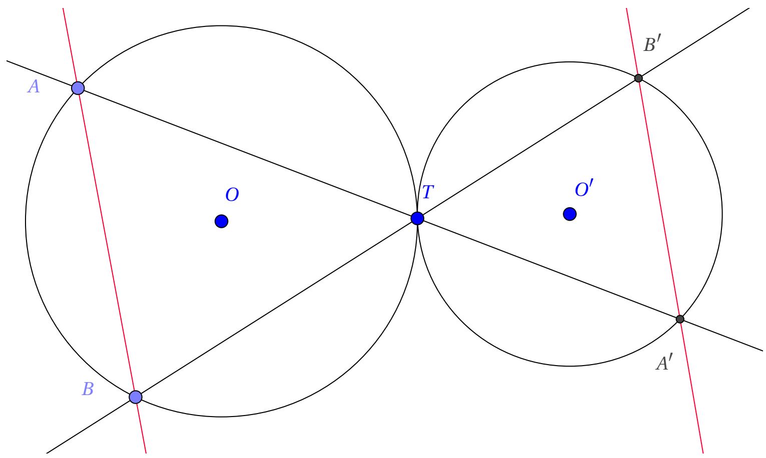
Chasse aux angles, *bis*

Exercice 1. [Angle inscrit dans le cas limite] Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, $[AB]$ une corde et $\mathscr{T}$ la tangente de A. Montrer que l'angle entre $\mathscr{T}$ et (AB) vaut la moitié de $\widehat{AOB}$.



Exercice 2. [Cas limite du théorème de Reim] Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles tangents en un point T, et $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ deux droites sécantes en T. On note A et A' (resp. B et B') les points d'intersection de $\mathscr{D}_1$ (resp. $\mathscr{D}_2$) avec $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Montrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.



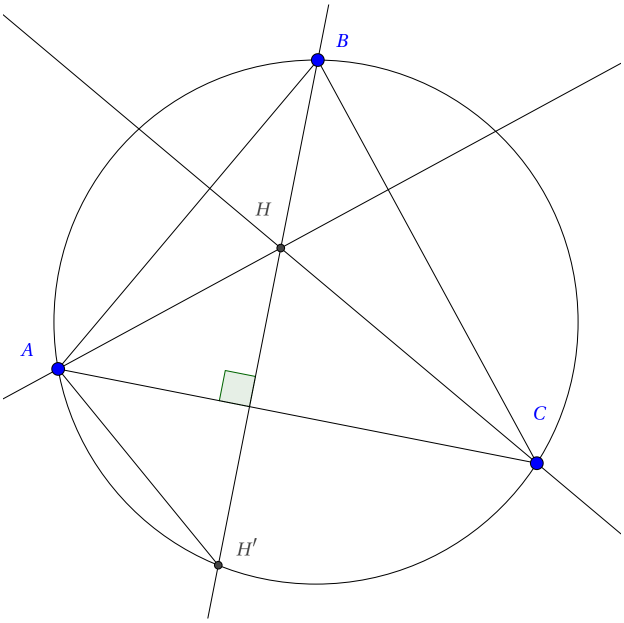
Exercice 3. [Triangle orthique]Soit ABC un triangle non rectangle et A', B', C' les pieds des hauteurs. Montrer que les hauteurs de ABC sont des bissectrices du triangle $A'B'C'$, dit *triangle orthique*.

Exercice 4. Soit ABC un triangle équilatéral et M un point du cercle circonscrit appartenant à l'arc BC ne contenant pas A. Montrer que $MA = MB + MC$.

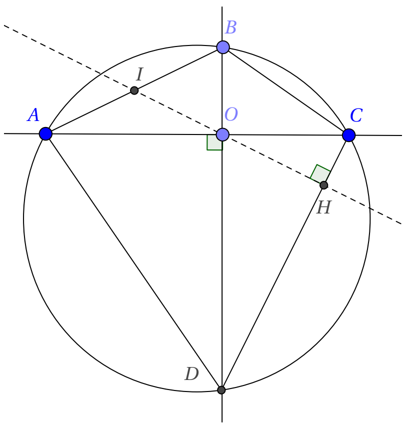
Exercice 5. [Problème « DPP »] Soit $\mathscr{D}$ une droite et A et B deux points situés d'un seul côté de $\mathscr{D}$. L'objectif est de construire un cercle passant par les deux points et tangent à la droite. On suppose que les droites (AB) et $\mathscr{D}$ ne sont pas parallèles. (Si elles le sont, le problème est plus facile.)

1. (Analyse) Soit $\mathscr{C}$ un tel cercle et T son point de tangence avec $\mathscr{D}$. Montrer que $(AB, AT) = (TB, \mathscr{D})$.
2. (Synthèse) Soit I le point d'intersection de (AB) avec $\mathscr{D}$, B' le symétrique de B par rapport à I, et B'' le symétrique de B par rapport à $\mathscr{D}$. Montrer que le cercle circonscrit à $AB'B''$ (de diamètre $[AB']$ dans le cas où $B' = B''$) coupe $\mathscr{D}$ en deux points qui conviennent pour le choix de T.

Exercice 6. [Symétrique de l'orthocentre]Soit ABC un triangle, H son orthocentre et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit. La hauteur issue de B recoupe $\mathscr{C}$ en H'. Montrer que H' est le symétrique de H par rapport à la droite (AC).



Exercice 7. [Un théorème de Brahmagupta] Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscriptible dont les diagonales sont perpendiculaires, et soit O leur point d'intersection. Soit H le projeté orthogonal de O sur $[CD]$, et I l'intersection de (OH) avec $[AB]$. L'objectif est de montrer que I est le milieu de $[AB]$.



Montrer qu'il est suffisant d'établir que $IO = IA$, puis conclure.

Indications

Exercice 1. Triangles isocèles et rectangles
Exercice 2. Introduire la tangente commune $\mathscr{T}$ aux deux cercles.