Graphes, *bis*

Exercice 1. Soit G un graphe à s sommets, a arêtes, et k composantes connexes.

1. Montrer que $s \leq a + k$.
2. Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 2. Soit G un graphe dont on note a le nombre d'arêtes, et l un entier naturel. On suppose que pour tout naturel $k \leq l$, G possède exactement quatre sommets de degré k. Montrer que $l \leq \sqrt{a}$.

Exercice 3. [Graphes orientés] Cinq amis jouent des parties d'échecs. En tout, quatorze parties sont jouées. Montrer qu'au moins une des personnes a perdu au plus deux parties.

Exercice 4. Au cours d'une réunion rassemblant $n \geq 4$ personnes, on se rend compte que dans chaque groupe de quatre personnes, il y en a au moins une qui connaît les trois autres. Montrer qu'il existe au moins $n-3$ personnes qui connaissent tout le monde.

Exercice 5. À la fin d'une réception, on demande aux participants avec combien de personnes ils ont discuté. On obtient comme réponses : $7, 6, 5, 4, 3, 3, 2$. Montrer qu'au moins une personne a fait une erreur. Même question avec :

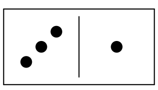
a) $7, 6, 5, 4, 3, 3, 2, 1$;
b) $7, 7, 5, 4, 3, 3, 2, 1$;
c) $7, 7, 6, 4, 3, 3, 2, 2$.

Exercice 6. Proposer un algorithme pour calculer la distance géodésique entre deux points dans un graphe.

Exercice 7. [Graphes hamiltoniens] On appelle chemin hamiltonien (en l'honneur de Hamilton) un chemin contenant chaque sommet exactement une fois. Un cycle hamiltonien est un cycle qui devient un chemin hamiltonien lorsqu'on enlève une arête. Un graphe est dit **hamiltonien** s'il contient un cycle hamiltonien.

1. Montrer que le graphe d'un cube est hamiltonien. Plus généralement, montrer que le graphe d'un des cinq solides platoniciens est hamiltonien. Bonus : c'est également vrai pour les treize solides archimédiens.
2. Montrer qu'un graphe complet est Hamiltonien.
3. Montrer qu'un tournoi, c'est-à-dire un graphe complet **orienté**, contient un chemin hamiltonien orienté (Théorème de Rédei, 1934).

Exercice 8. Peut-on aligner tous les pions du jeu de domino suivant la règle du jeu de domino ? Le jeu du domino à n valeurs est composé de n doubles du type (i, i), et de $n(n-1)/2$ paires (i, j) avec $i \neq j$, ce qui fait au total $n(n+1)/2$ pièces. Pour $n = 6$, on retrouve le jeu de domino classique.



Exercice 9. Le but de cet exercice est de démontrer le :

Théorème 0.1 (« Lemme de Sperner » en dimension deux, 1928)**.** Soit ABC un triangle, muni d'une triangulation. Les sommets de la triangulation sont coloriés avec trois couleurs, de telle sorte que :

1. A, B et C sont de couleur 1, 2 et 3.
2. Les sommets situés sur un côté de ABC sont coloriés avec une des deux couleurs des extrémités de ce segment. Par exemple, un sommet situé sur $[BC]$ est de couleur 2 ou 3.

Alors, il existe un triangle de la triangulation dont les sommets sont coloriés avec les trois couleurs. Plus précisément, il existe un nombre impair de tels triangles.

Pour démontrer ce résultat, on introduit un graphe de la façon suivante :

— les sommets sont les régions délimitées par la triangulation (y compris la région extérieure) ;

— deux sommets du graphe sont reliés par une arête si les régions correspondantes ont une frontière commune, et si cette frontière a des extrémités coloriées 1 et 2.

En considérant la parité des sommets du graphe (d'une part le sommet extérieur, et d'autre part les sommets intérieurs), démontrer le théorème.

Exercice 10. [Partage sans envie] Trois membres d'une famille (Agathe, Béatrice et Clément, notés A B et C dans la suite) doivent se partager une bûche de noël en effectuant deux découpes parallèles. Les trois parts obtenues ont des longueurs notées x, y et z, avec $l = x + y + z$ la longueur totale de la bûche. Les convives ne valorisent pas de la même façon les différentes parties de la bûche (extrémités, types de décorations), de sorte qu'un partage en trois parties de même longueur n'est a priori pas optimal. On cherche à obtenir un partage **sans envie**, c'est-à-dire un partage en trois parts tel que chaque personne préfère une part distincte.

L'ensemble de tous les partages possibles $\{(x, y, z) \mid x + y + y = l\}$ forme de façon naturelle un triangle. Trouver une façon d'utiliser le lemme de Sperner pour obtenir une approximation d'un partage sans envie (et à un partage sans envie en appliquant successivement une infinité de fois le lemme de Sperner).

Indications

Exercice 1.

1. Procéder par récurrence sur le nombre d'arêtes du graphe.
2. On pourra considérer le cas $k = 1$, et interpréter dans ce cas la quantité $a - s + 1$.

Exercice 2. Que vaut la quantité $0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + l$?