Problèmes isopérimétriques

Un problème isopérimétrique est un problème de maximisation de l'aire d'une figure, à périmètre fixé (*iso* = même). Dans cette feuille, on s'intéresse aux polygones.

Dans toute la suite, un polygone est dit **optimal** si de tous les polygones ayant le même périmètre et le même nombre de côtés, il a la plus grande aire. Le fait de savoir s'il existe des polygones optimaux est difficile. Dans cette feuille, on démontre entre autres :

1. Pour les polygones à trois côtés : il existe des 3-gones (triangles) optimaux : ce sont les triangles équilatéraux.
2. Pour les polygones à quatre côtés : il existe des 4-gones (quadrilatères) optimaux : ce sont les carrés.
3. Pour un nombre $n \geq 5$ de côtés, le problème est plus difficile. On démontre que si un polygone n'est *pas* convexe et régulier, alors il n'est *pas* optimal, autrement dit on peut trouver un autre polygone ayant même nombre de côtés, même périmètre, et aire plus grande.

Remarque : le résultat général est que les n-gones optimaux existent et sont les n-gones réguliers convexes, mais les résultats de cette feuille ne suffisent pas pour établir ce théorème, car ils ne montrent pas l'*existence* d'une solution, mais juste que si elle existe, alors c'est celle-là.

Certains exercices utilisent l'inégalité arithmético-géométrique, à deux ou trois variables. Les exercices dépendent parfois les uns des autres (dans l'ordre de la feuille)

Exercice 1. [Parallélogrammes optimaux] Soit p un nombre réel strictement positif.

1. Déterminer le ou les rectangles de périmètre égal à p dont l'aire est maximale pour ce périmètre.
2. Même question avec les parallélogrammes de périmètre p.

Exercice 2. Soient A et B deux points, et $\mathscr{A}$ un réel. Parmi tous les triangles ABC d'aire $\mathscr{A}$, déterminer celui ou ceux dont le périmètre est minimal.

Exercice 3. [Le problème dual du précédent] Soient A et B deux points. Parmi tous les triangles de périmètre p fixé, trouver celui ou ceux d'aire maximale.

Exercice 4. [Quadrilatères optimaux] Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé.

1. Montrer que s'il n'est pas convexe, il existe un quadrilatère convexe de même périmètre et d'aire supérieure. Dans la suite, on supposera la quadrilatère convexe.
2. Montrer qu'il existe un losange de même périmètre et de plus grande aire.
3. En déduire que les quadrilatères non croisés de périmètre p et d'aire maximale sont ceux qui sont carrés (donc de coté $p/4$ et d'aire $p^2/16$).

Exercice 5. Soient a et b deux réels strictement positifs. Déterminer les triangles dont deux côtés sont de longueur a et b, et qui sont d'aire maximale.

Exercice 6. [Al-Kashi, alias « Pythagore généralisé » ou encore « loi des cosinus »]

Soit ABC un triangle, et a, b et c les longueurs de ses côtés. Montrer que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC}).$$

Exercice 7. [Formule de Héron] Soit ABC un triangle, a b et c les longueurs de ses cotés, $s = (a+b+c)/2$ son demi-périmètre et $\mathscr{A}$ son aire. Montrer que

$$\mathscr{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Exercice 8. [Triangles optimaux] Soit p un réel strictement positif. Montrer que les triangles de périmètre p et d'aire maximale pour ce périmètre sont les triangles équilatéraux de périmètre p.

Exercice 9. Soit $p > 0$ un réel, et $\mathscr{P} = A_1 A_2 \ldots A_n$ un polygone à n côtés de périmètre p.

1. S'il n'est pas convexe, montrer qu'il n'est pas optimal.
2. S'il n'est pas équilatéral, montrer qu'il n'est pas optimal.

Exercice 10. Soit $p > 0$ un réel et $\mathscr{P} = A_1 A_2 \ldots A_{2n}$ un polygone de périmètre p, équilatéral et avec un nombre pair $2n$ de côtés. Montrer que si ses sommets ne sont pas tous sur un même cercle, alors il n'est pas optimal.

Indications

Exercice 4. Utiliser les exercices précédents.
Exercice 7. On peut écrire l'aire à l'aide d'un sinus, puis à l'aide d'un cosinus, puis utiliser le théorème d'Al Kashi.
Exercice 8. Utiliser la formule de Héron et l'inégalité arithmético-géométrique.