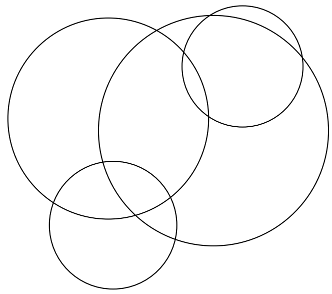
Récurrence, *bis*

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A(n)$ l'assertion « $2n+1 \leq 2^n$. »

La propriété $A(n)$ est-elle héréditaire ? Est-elle vraie pour tout entier n ? Pour certains n ?

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier. On trace n cercles dans le plan.

Montrer qu'on peut colorier chaque région du plan ainsi délimitée avec exactement deux couleurs (bleu et rouge par exemple) de manière à ce que deux régions séparées par un arc de cercle soient toujours de couleur différente.



Exercice 3. La « preuve » suivante prétend montrer par récurrence que tous les entiers supérieurs ou égaux à deux sont pairs.

> **Initialisation.** L'entier 2 est bien pair.
>
> **Hérédité.** Soit $n > 2$ un entier. Écrivons n comme la somme de deux entiers strictement inférieurs : $n = a + b$. Par hypothèse de récurrence, a et b sont pairs. Donc $a + b$ est également pair.

Le résultat est évidemment faux. Où se trouve l'erreur de raisonnement ?

Exercice 4. Un *graphe (non orienté)* est un objet mathématique composé de sommets et d'arêtes reliant chacune deux sommets, les extrémités de l'arête. On dit qu'un graphe est *simple* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. (« pas de *boucles* ») les extrémités des arêtes sont deux sommets distincts ;
2. (« pas d'*arêtes doubles* ») entre deux sommets donnés, il n'existe au plus qu'une arête.

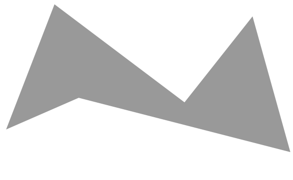
On dit qu'un graphe simple est un *arbre* s'il vérifie les deux conditions supplémentaires suivantes :

3. (« le graphe est *connexe* ») deux sommets quelconques peuvent toujours être reliés par une chaîne d'arêtes (distinctes) ;
4. (« pas de *cycles* ») cette chaîne est unique.

Montrer qu'un arbre à n sommets possède $n-1$ arêtes.

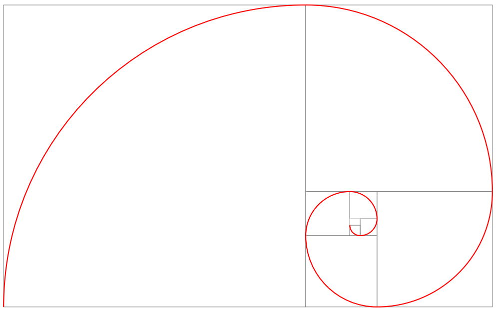
Exercice 5. Un *polygone* est une ligne brisée fermée. Il est dit *simple* si deux côtés non consécutifs ne se rencontrent pas et deux côtés consécutifs n'ont en commun que l'un de leurs sommets.

Trianguler un polygone simple signifie l'écrire (lui et son intérieur) comme union de triangles, dont on demande ici que les sommets soient de plus des sommets du polygone.
Montrer que tout polygone simple à $n \geq 3$ côtés est triangulable par $n-2$ triangles.



Exercice 6. On définit les *nombres de Fibonacci* $(F_n)_{n\geq 1}$ par récurrence de la façon suivante : $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Calculer les nombres de Fibonacci jusqu'à $n = 10$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il y a exactement F_{n+1} façons de paver un échiquier de taille $2 \times n$ avec des dominos.
3. Comparer, lorsque $n \geq 1$, les nombres F_n^2 et $F_{n-1}F_{n+1}$. Conjecturer une relation entre ces deux quantités puis la démontrer.



Spirale de Fibonacci : les côtés des carrés vérifient la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Exercice 7. Montrer que le n-ème nombre de Fibonacci F_n est pair ssi $3|n$.

Exercice 8. (Représentation de Zeckendorf d'un entier) Montrer que tout entier $n \geq 0$ admet une décomposition en nombres Fibonacci distincts et non consécutifs. Montrer également que cette décomposition est unique.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots u_n$. Conjecturer une formule donnant u_n en fonction de n et la démontrer.

Exercice 10. Soit x un réel non nul tel que $x + \dfrac{1}{x}$ soit entier. Montrer que pour tout entier naturel n, le réel $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ est un entier.

Exercice 11. Démontrer que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $2^p(2q+1)$, avec p et q entiers.

Indications

Exercice 5. Montrer qu'il existe au moins une *oreille*, c'est-à-dire un triangle avec deux arêtes appartenant à la frontière du polygone, et la troisième située à l'intérieur du polygone.

Plus précisément, montrer qu'il existe toujours deux oreilles qui ne se chevauchent pas.

Exercice 6. Pour la dernière question, démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}.$$

Exercice 8. Pour l'existence, procéder par récurrence forte.

Pour l'unicité, démontrer préalablement le lemme suivant : la somme de tout ensemble de nombres de Fibonacci distincts et non consécutifs, dont le plus grand élément est F_j, est strictement inférieure à F_{j+1}.

Exercice 9. Procéder par récurrence forte.