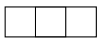
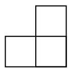
Le raisonnement par récurrence

Exercice 1.
1. On considère les entiers de la forme $4^n - 1$, où $n \in \mathbb{N}$. Conjecturer une propriété de ces entiers puis la démontrer. Généraliser.
2. En étudiant maintenant les entiers de la forme $8^n - 3^n$, généraliser encore plus.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A(n)$ l'assertion « $4^n + 1$ est divisible par trois. »
Montrer que $A(n)$ est héréditaire. Est-elle vraie pour tout entier n ? Pour certains n ?

Exercice 3. Conjecturer une formule pour la somme $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ des premiers nombres impairs, puis la démontrer par récurrence.

Exercice 4. On suppose que sur un circuit se trouvent un certain nombre de dépôts d'essence, contenant à eux tous juste assez d'essence pour faire un tour du circuit. Montrer qu'en partant avec un réservoir vide d'un dépôt d'essence bien choisi, il est possible de faire un tour du circuit sans jamais manquer d'essence.

Exercice 5. Un polyomino est une figure obtenue en assemblant des carrés de même taille. Il existe un seul monomino :  et un seul domino : . Par contre, il existe deux triominos différents : un « droit » c'est-à-dire du type , et un « coudé » .

1. On pose un monomino sur un coin d'un échiquier de taille 8×8. Est-il possible de paver les $63 = 21 \times 3$ cases restantes par des triominos coudés ?
2. Même question en posant le monomino sur une case quelconque de l'échichier.

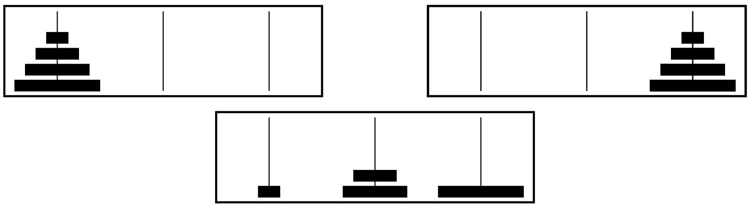
Exercice 6.
1. Dans le plan, on considère trois droites $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ formant un « vrai » triangle, autrement dit elles ne sont pas concourantes et il n'y en a pas deux parallèles. Donner le nombre R_3 de régions (zones blanches) découpées par ces trois droites.
2. On considère quatre droites $\Delta_1, \dots, \Delta_4$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Donner le nombre R_4 de régions découpées par ces quatre droites.
3. On considère n droites $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Soit R_n le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_n$, et R_{n-1} le nombre de régions délimitées par $\Delta_1 \dots \Delta_{n-1}$. Montrer que $R_n = R_{n-1} + n$.
4. Calculer par récurrence le nombre de régions délimitées par n droites en position générale, c'est-à-dire telles qu'il n'en existe pas trois concourantes ni deux parallèles.

Exercice 7. La « preuve » suivante prétend montrer par récurrence sur $n \geq 1$ qu'étant donné n nombres réels $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, ils sont en fait tous égaux.

> **Initialisation.** S'il n'y a qu'un nombre u_1, il n'y a rien à montrer.
>
> **Hérédité.** Soit $n \geq 1$ un entier tel que n nombres réels soient toujours égaux et donnons-nous $(n+1)$ nombres réels $u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1} \in \mathbb{R}$.
>
> D'après l'hypothèse de récurrence, on a d'une part $u_1 = u_2 = \cdots = u_n$ et d'autre part $u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$. Cela entraîne que $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = u_{n+1}$, et montre donc la propriété voulue.

Le résultat est évidemment faux. Où se trouve l'erreur de raisonnement ?

Exercice 8. La *tour d'Hanoï* est un jeu à un joueur qui se joue comme suit : on dispose de trois piquets et de n disques percés de tailles différentes. Une position légale du jeu est une disposition des n disques sur les piquets qui soit telle que sur chaque piquet, un disque n'est jamais posé sur un autre disque plus petit. Dans la position de départ, tous les disques sont sur le premier piquet. Le but du jeu est d'arriver à la situation où tous les disques sont sur le troisième piquet, en ne déplaçant qu'un disque à la fois (on n'a évidemment accès qu'au disque le plus haut de chaque piquet) et en ne passant que par des positions légales.



Positions initiale, finale et intermédiaire

1. Montrer que quel que soit n, le jeu de la tour d'Hanoï est résoluble.
2. Quel est le nombre minimum de coups nécessaires pour le résoudre ?

Exercice 9. Dans un *tournoi d'ordre n* (au sens mathématique), $n \geq 2$ équipes s'affrontent une fois chacune. Chaque match désigne un vainqueur (il n'y a donc pas de match nul).

1. Montrer que quelle que soit l'issue du tournoi, il sera possible de numéroter les équipes $É_1$, $É_2$, ..., $É_n$ de telle sorte que, pour tout $1 \leq i < n$, l'équipe $É_i$ ait battu l'équipe $É_{i+1}$ *(théorème de Rédei, 1934)*.
2. Un tournoi est dit *équilibré* si chaque équipe a gagné autant de matchs qu'elle en a perdu. Montrer qu'il existe un tournoi équilibré d'ordre n si et seulement si n est impair.

.... ⋆ ⋆ ⋆ *Variantes du principe de récurrence* ⋆ ⋆ ⋆ ....

Exercice 10. [Une « récurrence forte »] Montrer que tout entier supérieur ou égal à deux peut s'écrire comme produit de nombres premiers.

Exercice 11. [Une « récurrence forte »] Démontrer que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de deux distinctes.

Exercice 12. [« Récurrence de Cauchy » et application] Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ contenant 1 et telle que

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A \Rightarrow 2n \in A$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in A \Rightarrow n \in A$.

Montrer que $A = \mathbb{N}^*$.
En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : si $a_1, ..., a_n$ sont des réels positifs, alors on a

$$\frac{a_1 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n},$$

avec égalité si et seulement tous les a_i sont égaux.

Indications

Exercice 1. Les entiers semblent divisibles par trois dans le premier cas, par cinq dans le second cas.
Exercice 3. Les sommes semblent toujours donner des carrés.
Exercice 4. Montrer qu'il existe forcément un dépôt d'essence contenant assez d'essence pour rejoindre le suivant.
Exercice 5. Penser aussi à des échiquiers de taille différente.
Exercice 11. Faire intervenir la parité des entiers.