Principe des tiroirs : thème et variations

1 Introduction

Proposition 1.1 (« Principe des tiroirs », version simple)**.** Soit n un entier naturel non nul. Si on range $n+1$ objets dans n tiroirs, il existe (au moins) un tiroir contenant (au moins) deux objets.

Démonstration. (en utilisant un raisonnement par l'absurde) Supposons au contraire que les tiroirs ne contiennent pas plus d'un objet chacun. Comme il y a n tiroirs, il y a au maximum n objets, ce qui est absurde puisqu'il y a $n+1$ objets d'après l'énoncé.

Ceci montre qu'il existe donc au moins un tiroir contenant au moins deux objets. □

Démonstration. (deuxième preuve, sans raisonnement par l'absurde cette fois)

Notons c_1 le nombre d'objets dans le premier tiroir, c_2 le nombre d'objets dans le deuxième tiroir etc, jusqu'à c_n. Calculons la moyenne des nombres c_1, ... c_n, c'est-à-dire le nombre moyen d'objets par tiroir. Comme il y a en tout $n+1$ objets et n tiroirs, il y a en moyenne $\frac{n+1}{n}$ objets par tiroir. Remarquons que cette moyenne est strictement supérieure à 1.

Or lorsque l'on fait une moyenne de nombres (même réels, pas forcément entiers comme ici), au moins l'un de ces nombres est supérieur ou égal à la moyenne. C'est un principe général : **la moyenne est inférieure ou égale au maximum (avec égalité si et seulement si tous les nombres sont identiques)**. [1] Donc ici, il y a un tiroir qui contient plus d'objets que la moyenne (qui est > 1), donc strictement plus d'un objet, autrement dit au moins deux objets. □

On peut se demander s'il est utile d'apprendre deux preuves d'un même résultat, surtout lorsque l'une est sensiblement plus courte. En maths, il est toujours utile de comprendre les résultats de plusieurs façons : c'est ce qui permet d'avoir plus d'idées lorsque l'on résout un exercice. Certains théorèmes ont plusieurs dizaines de preuves, qui n'ont parfois rien à voir entre elles et qui éclairent toutes le problème original d'une lumière différente.

Proposition 1.2 (Version améliorée)**.** Soient n et k deux entiers naturels non nuls. Si on range $nk+1$ objets dans n tiroirs, il existe (au moins) un tiroir contenant (au moins) $k+1$ objets.

Exercice 1. Rédiger une preuve par l'absurde, et rédiger aussi une preuve en utilisant une moyenne.

Cette version du résultat est adaptée à certaines situations, mais pas à toutes : il faut par exemple connaître le nombre de tiroirs à l'avance. Il se trouve qu'il existe deux autres versions du principe des tiroirs, c'est l'objet de ce qui suit.

2 Les trois grandes variations

En remplaçant n par b et k par $c-1$ dans le résultat précédent, on obtient l'énoncé équivalent suivant :

Proposition 2.1. Soient b et c deux entiers naturels non nuls. Si on range $b(c-1)+1$ objets dans b tiroirs, il existe (au moins) un tiroir contenant (au moins) c objets.

1. En effet, avec les mêmes notations, si l'on note c le maximum des nombres c_1, c_2, ... c_n, on a alors par définition les inégalités $c_1 \le c$, $c_2 \le c$, ... $c_n \le c$ et en sommant tout ceci et en divisant par n on obtient

$$\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n} \le \frac{c+c+\ldots+c}{n} = c.$$

Plus généralement, on peut considérer le schéma d'énoncé (incomplet) suivant :

> Si on range $\boxed{a}$ objets dans $\boxed{b}$ tiroirs,
> il existe (au moins) un tiroir contenant (au moins) $\boxed{c}$ objets.

Cet énoncé est incomplet car il comporte des symboles non définis : a, b et c. Ces symboles désignent a priori des nombres entiers positifs, mais sans plus de précisions sur ces entiers, l'assertion n'est pas forcément vraie.

Le principe des tiroirs classique est un théorème où b et c peuvent être fixés par le lecteur, et le nombre a est déterminé par l'énoncé en fonction de b et c de telle façon que l'assertion soit vraie. Plus précisément, l'assertion est vraie pour $a = b(c-1)+1$, comme vu plus haut.

On peut imaginer deux autres énoncés : celui où c est déterminé par a et b, et enfin celui où b est déterminé par a et c. Voici ces deux versions, avec à chaque fois la formule qui rend l'assertion correcte.

Proposition 2.2. Soient $a \geq 0$ et $b \geq 1$ des entiers.
Si on range a objets dans b tiroirs, il existe (au moins) un tiroir contenant (au moins) $\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil$ objets.

Démonstration. Calculons la moyenne du nombre d'objets par tiroir : comme il y a a objets et b tiroirs, il y a en moyenne $\frac{a}{b}$ objets par tiroirs. Comme « la moyenne est inférieure au maximum », le tiroir ayant le plus grand nombre d'objets en a plus que la moyenne, $\frac{a}{b}$, donc contient au moins $\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil$ objets. □

Proposition 2.3. Soient $a \geq 1$ et $c \geq 2$ des entiers.
Si on range a objets dans $\left\lceil \frac{a}{c-1} \right\rceil - 1$ tiroirs (ou moins), il existe (au moins) un tiroir contenant (au moins) c objets.

Ce qu'il faut comprendre, c'est que $\left\lceil \frac{a}{c-1} \right\rceil - 1$ est l'entier immédiatement **strictement** inférieur à $\frac{a}{c-1}$ (ce n'est pas la partie entière inférieure).

Démonstration. Supposons que la proposition soit fausse, c'est-à-dire supposons qu'il existe des nombres a et c comme dans l'énoncé, tels que l'on ait a objets dans $\left\lceil \frac{a}{c-1} \right\rceil - 1$ tiroirs, mais que tous les tiroirs contiennent au maximum $c-1$ objets.

Notons $b = \left\lceil \frac{a}{c-1} \right\rceil - 1$ le nombre de tiroirs : on a donc $b < \frac{a}{c-1}$. Comme les b tiroirs contiennent au maximum $c-1$ objets chacun, le nombre total a d'objets vérifie :

$$a \leq b(c-1) < \frac{a}{c-1} \cdot (c-1)$$

c'est-à-dire $a < a$ ce qui est absurde. □