Exercices sur le principe des tiroirs, *bis*

Cette feuille contient des exercices de difficulté variée.

Exercice 1. Montrer que parmi douze entiers distincts à deux chiffres, il en existe toujours deux dont la différence est un nombre dont les deux chiffres sont identiques.

Exercice 2. On place cinq points dans un triangle équilatéral de côté 2. Montrer qu'il y en a deux qui sont à distance ≤ 1.

Exercice 3. On considère un ensemble de dix entiers à deux chiffres. Montrer qu'on peut en tirer deux sous-ensembles d'entiers de telle sorte que les sommes des entiers des deux sous-ensembles soient égales.

Exercice 4. Montrer que parmi quatre entiers, il en existe deux dont la somme ou la différence est multiple de 5.

Exercice 5. Montrer que parmi sept entiers, il en existe deux dont la somme ou la différence est multiple de 10.

Exercice 6. Soient a, b, c et d quatre entiers. Montrer que le produit des six différences $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$ est divisible par 12.

Exercice 7. On écrit les entiers de 1 à 101 dans un ordre quelconque, ce qui fournit une suite finie d'entiers. Montrer qu'il est toujours possible d'en sélectionner 11 de sorte qu'ils forment une suite croissante ou bien une suite décroissante.

Exercice 8. Soit $n \geq 2$ un entier, et soient n entiers. Montrer qu'il existe un sous-ensemble de ces n entiers dont la somme est divisible par n.

Exercice 9. Soient vingt entiers naturel inférieurs à 70. On considère leurs différences deux à deux. Montrer que parmi ces différences, il y en a quatre identiques.

Exercice 10. Soit n un entier impair non divisible par 5. Montrer qu'il possède un multiple dont tous les chiffres sont des « 1 ».

Indications

Exercice 1. En termes de divisibilité, qu'est-ce qu'un nombre composé des deux mêmes chiffres ?
Exercice 3. De façon très générale, si un ensemble a n éléments, combien a-t-il de parties ?
Exercice 10. Commencer par montrer qu'un entier impair non divisible par 5 possède un multiple dont tous les chiffres sont des « 9 ».