Rappels de géométrie plane

Le but de cette fiche n'est *pas* de développer une théorie rigoureuse de la géométrie euclidienne, mais plutôt de survoler la « géométrie euclidienne plane de collège » (pas de vecteurs, pas de produit scalaire, pas de trigonométrie, pas de barycentres, pas de nombres complexes, pas de congruences modulo 2π), et d'établir une liste de *vocabulaire et propriétés à connaître*. Certaines définitions et preuves ne sont pas rappelées.

Méthodologie conseillée : lire la fiche dans l'ordre, s'arrêter dès qu'une définition ou la preuve d'un théorème n'est pas connue et chercher une référence (pour de la géométrie élémentaire, wikipedia est en général suffisant).

Dans toute la suite, lorsque l'on écrit qu'*il existe un objet vérifiant une propriété*, cela signifie qu'il en existe *au moins un*. S'il n'en existe qu'un seul, on le précise.

1 Notions fondamentales

1.1 Isométries (affines) du plan

La notion fondamentale en géométrie est celle d'isométrie, qu'on présente ici de façon intuitive.

Intuitivement, deux parties du plan sont isométriques si elles sont *superposables* (avec ou sans retournement du papier). On dit parfois que deux figures sont *égales* pour dire qu'elles sont isométriques, c'est un abus de langage historiquement courant en géométrie, surtout pour les triangles. Les transformations suivantes sont normalement déjà connues et sont des isométries : translations, rotations, symétries centrales, symétries axiales.

S'il est vrai qu'une isométrie conserve les angles, la réciproque est en revanche fausse : une application qui conserve les angles n'est pas forcément une isométrie. Par exemple, les homothéties ne sont en général pas des isométries, car elles dilatent les longueurs d'un facteur fixé, et pourtant elles préservent les angles.

Les démonstrations données dans cette fiche n'utilisent essentiellement que les propriétés suivantes des isométries, que l'on admet :

1. Pour tout couple de points A et B, il existe une isométrie envoyant A sur B.
2. Étant donnés trois points O, A et B vérifiant $OA = OB$, il existe une isométrie fixant O et envoyant A sur B.
3. Étant donné quatre points A, B, C et D avec $AB{=}CD$, il existe une isométrie envoyant A sur C et B sur D.

1.2 Angles (géométriques)

Un *angle géométrique* est une portion du plan délimitée par deux demi-droites (les côtés) de même origine (le sommet). Un angle est dit *plat* si ses deux côtés sont alignés. Deux angles sont dits *adjacents* s'ils partagent un côté.

Note : il existe d'autres notions d'angles, par exemple la notion *d'angle orienté*, qui prend en compte l'orientation de l'angle. Dans cette fiche, on se restreint aux angles géométriques, donc non orientés.

À connaître : *mesure* d'un angle (en degrés, ou en radians), comparaison des (mesures d') angles, somme et différence (de mesures) d'angles. Ne pas confondre un angle et sa mesure. Un angle est un objet de nature géométrique. Une mesure d'angle est un nombre. Deux angles isométriques ont la même mesure.

Par abus de langage, deux angles géométrique sont parfois dits *égaux* s'ils sont isométriques. On peut ainsi dire : « Tous les angles plats sont égaux. »

Bissectrice d'un angle : demi-droite qui partage l'angle en deux angles adjacents isométriques.

Théorème 1.1. Tout angle possède une bissectrice et une seule.

(Attention, il s'agit ici d'une demi-droite, ce que certains appellent la demi-bissectrice intérieure)

Un *angle droit* est un angle formé par la bissectrice d'un angle plat avec un de ses côtés. Tous les angles droits sont isométriques.

Un angle est *rentrant* ou *saillant* suivant s'il est supérieur ou inférieur à un angle plat. Un angle saillant est *obtus* ou *aigu* suivant s'il est supérieur ou inférieur à un angle droit.

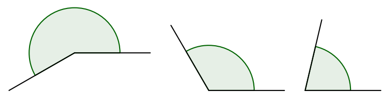


Fig : Angles rentrant, (saillant) obtus, et (saillant) aigu.

Cercles

Définition 1.2. Un *cercle* est l'ensemble des points à une certaine distance donnée (le rayon) d'un point donné (le centre).

À connaître : intérieur et extérieur d'un cercle. Disque. Diamètre, rayon. Corde, arc (portion de cercle délimitée par deux points du cercle). Cercles concentriques.

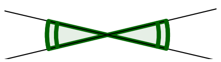
Deux cercles de même rayon sont isométriques.

Angle au centre qui intercepte un arc ou une corde. Deux angles au centre égaux interceptent deux arcs égaux et réciproquement. *Angle inscrit* : angle dont le sommet est un point du cercle, et qui intercepte une corde de ce cercle.

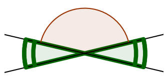
Angles supplémentaires (la somme est un angle plat), complémentaires (la somme est un angle droit). Un angle aigu a pour supplémentaire un angle obtus et réciproquement.

Deux angles supplémentaires ont leurs moitiés complémentaires. Deux angles ayant même complémentaire ou supplémentaire sont égaux.

Les bissectrices de deux angles supplémentaires adjacents forment un angle droit.

Angles *opposés par le sommet* : 

Proposition 1.3. Deux angles opposés par le sommet sont égaux.

Preuve : ils ont même supplémentaire.


Droites perpendiculaires. Par un point d'une droite, on peut mener une perpendiculaire et une seule.

Projection orthogonale d'un point sur une droite. La distance d'un point à une droite est la distance de ce point au projeté orthogonale sur la droite.

2 Triangles

Une *ligne brisée* est liste ordonnée de points (les sommets) reliés par des segments (les côtés). Un *polygone* est une ligne brisée fermée (c'est-à-dire dont les deux extrémités sont confondues). Un polygone est *convexe* s'il est situé d'un même côté de chacun de ses côtés.

(De façon générale, une partie du plan est *convexe* si tout segment joignant deux points de la partie est entièrement inclus dans la partie. Par exemple, un disque est convexe, mais pas un cercle.)

Un *triangle* est un polygone à trois sommets. Un triangle partage le plan en deux régions : son intérieur et son extérieur. L'intérieur d'un triangle est toujours convexe. (Ces deux propriétés ne sont pas forcément vérifiées pour d'autres polygones que les triangles.)

Vocabulaire : côté opposé à un sommet et inversement.

Droites remarquables d'un triangle : *hauteurs* issue d'un point / relative à un côté. *Médianes*, *bissectrices* intérieures, extérieures. *Médiatrices* des côtés.

Un triangle est *isocèle* s'il a deux côtés égaux, *équilatéral* s'il a trois côtés égaux, *rectangle* s'il a un angle droit. Dans ce dernier cas, le côté opposé à l'angle droit est appelé hypoténuse. Lorsque les côtés de l'angle droit sont égaux, le triangle est *isocèle rectangle*.

Vocabulaire : sommet et base d'un triangle isocèle.

2.1 Triangles égaux (isométriques)

Si deux triangles sont isométriques, alors ils ont évidemment des côtés et des angles de même mesure. Réciproquement :

Théorème 2.1 (Deux premiers « cas d'égalité » des triangles)**.** Deux triangles sont isométriques si l'une des conditions suivantes est vérifiée

1. un côté et les deux angles adjacents à ce côté sont égaux ;
2. un angle et les deux côtés adjacents sont égaux.

Vocabulaire : lorsque deux triangles sont égaux, les éléments qui se correspondent sont dit *homologues*.

2.2 Symétries axiales, axes de symétrie

Les termes « symétrie orthogonale par rapport à une droite », « symétrie axiale », ou « réflexion (orthogonale) »sont équivalents. Le terme « symétrie » utilisé seul est à éviter car il est est ambigu, à cause des symétries centrales. On préfèrera *réflexion*.

Deux droites qui sont symétriques par rapport à un axe se coupent sur l'axe ou sont parallèles.

Une droite est *axe de symétrie d'une figure* si la figure et son image par la réflexion associée sont confondues.

Une réflexion conserve les angles (toujours géométriques, donc non orientés) et les longueurs. C'est donc une isométrie.

Tout diamètre d'un cercle en est un axe de symétrie.

Triangles isocèles Un triangle est *isocèle* s'il a deux côtés de même longueur. Le sommet commun aux deux côtés égaux est le *sommet* du triangle, le troisième côté est la *base*.

Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux. Réciproquement, si un triangle a deux angles égaux, il est isocèle.

Dans un triangle isocèle, la bissectrice de l'angle au sommet est aussi la médiane, la hauteur, et la médiatrice relative à la base du triangle. C'est un axe de symétrie du triangle.

Un triangle rectangle peut être considéré de deux façons différentes comme la moitié d'un triangle isocèle.

Un triangle est *équilatéral* s'il a ses trois côtés égaux ou, de façon équivalente, ses trois angles égaux. Dans un triangle équilatéral, les médiatrices, médianes, hauteurs et bissectrices relatives à un côté sont toutes confondues. Un triangle équilatéral possède trois axes de symétrie.

Proposition 2.2 (Médiatrice d'un segment)**.** Tout point situé sur la médiatrice d'un segment est à égale distance des extrémités, et réciproquement.

Preuve de la réciproque : si M est équidistant de deux points A et B, alors AMB est isocèle en M, donc le sommet M est sur la médiatrice de la base $[AB]$.

Théorème 2.3. Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point équidistant des trois sommets. C'est le centre de l'unique cercle passant par les sommets du triangle.

Théorème 2.4 (Troisième cas d'égalité de deux triangles)**.** Si deux triangles ont leurs trois côtés égaux, ils sont isométriques.

Cas d'égalité des triangles rectangles : hypoténuse et un angle égaux.

Application : la bissectrice d'un angle est l'ensemble des points à égale distance des deux côtés de l'angle.

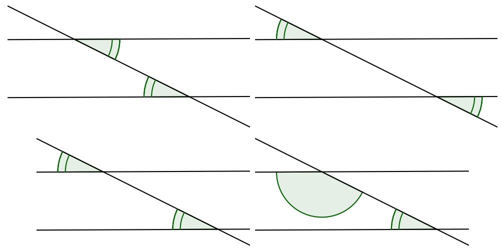
Théorème 2.5. Les bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes, en un point qui est équidistant des côtés. C'est le centre de l'unique cercle intérieur au triangle et tangent à ses trois côtés, qu'on appelle le cercle inscrit.

Vocabulaire : bissectrices extérieures d'un triangle, cercles exinscrits. Application : tracer la bissectrice d'un angle dont on ne voit pas le sommet.

3 Parallélisme

Deux droites sont dites parallèles si elles ne s'intersectent pas. Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles, deux droites parallèles à une troisième sont parallèles. Lorsque deux droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe également l'autre.

Une sécante à deux droites données (non forcément parallèles) définit huit angles aux deux points d'intersection avec les deux droites. Paires d'angles *alternes-internes*, *alternes-externes*, *correspondants*, *intérieurs*.

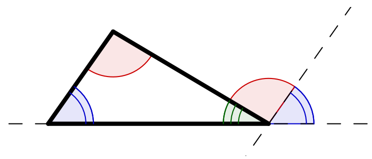


Théorème 3.1. Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une troisième, les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont égaux ; les angles intérieurs d'un même côté sont supplémentaires.

Réciproquement, si les angles alternes internes sont égaux (ou une des autres conditions), alors les droites sont parallèles.

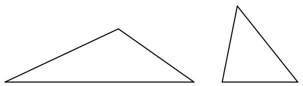
3.1 Somme des angles d'un polygone

Théorème 3.2. La somme des angles d'un triangle vaut π.



On en déduit que :
1) dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires ;
2) dans un triangle équilatéral, chaque angle vaut $\pi/3$;
3) lorsque deux triangles ont deux angles égaux, leurs trois angles sont égaux.

Si un triangle possède un angle obtus, il est dit *obtusangle*. Sinon, il est dit *acutangle*.



Théorème 3.3. La somme des angles d'un quadrilatère convexe vaut 2π. Plus généralement, la somme des angles d'un n-gone convexe vaut $(n-2)\pi$.

Preuve : on découpe en deux triangles, ou plus généralement en $n-2$ triangles.

4 Quadrilatères

Un quadrilatère a des côtés qui s'intersectent ailleurs qu'un un sommet, on dit qu'il est *croisé*. (Dans ce cas, il est forcément non convexe.) Dans le cas contraire on dit qu'il est *simple* (ou parfois : *non-croisé*). Un quadrilatère simple peut être convexe ou pas.

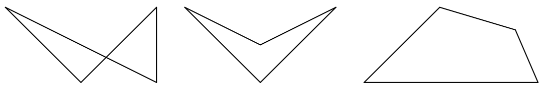


Fig : quadrilatères croisé, simple non convexe, simple convexe.

Deux côtés ou deux sommets sont consécutifs ou opposés. Les diagonales sont les segments reliant des sommets opposés. Attention, les diagonales d'un quadrilatère non convexe peuvent être à l'« extérieur » du quadrilatère.

Parallélogrammes Pour un quadrilatère, les conditions suivantes sont équivalentes :

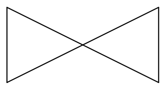
1. les côtés sont parallèles deux à deux ;
2. deux angles consécutifs sont supplémentaires ;
3. deux angles opposés sont égaux ;
4. les diagonales se coupent en leur milieu.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que le quadrilatère est un parallélogramme. Un tel quadrilatère est forcément convexe.

Pour un quadrilatère *convexe*, être un parallélogramme est de plus équivalent à chacune des conditions suivantes :

1. les côtés opposés ont même longueur ;
2. deux côtés sont de même longueur et parallèles ;

La convexité est ici cruciale pour avoir cette équivalence comme le montre la figure suivante :



Rectangles Un parallélogramme a un angle droit ssi ses diagonales ont même longueur. Dans ce cas, on dit que c'est un *rectangle*.

Un rectangle a forcément quatre angles droits puisque les angles opposés sont égaux dans un parallélogramme. Réciproquement, tout quadrilatère ayant quatre angles droits est un rectangle. (Trois suffisent.)

Les diagonales d'un rectangle ayant même longueur, leur point d'intersection est équidistant des quatre sommets : c'est le centre d'un cercle circonscrit au rectangle. Les diagonales sont des diamètres de ce cercle. Réciproquement les extrémités de deux diamètres d'un cercle sont les sommets d'un rectangle.

Théorème 4.1. Dans un triangle rectangle, la médiane issue de l'angle droit vaut la moitié de l'hypoténuse.

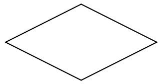
Preuve : en prolongeant la médiane du double de sa longueur on obtient un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme. Comme un des angles est droit, c'est un rectangle. Donc les diagonales ont même longueur.

Un triangle est rectangle si et seulement si un de ses côtés est un diamètre de son cercle circonscrit (on dit qu'il est inscrit dans un demi-cercle).

Dans un rectangle, deux côtés opposés ont la même médiatrice. Les deux médiatrices des côtés sont des axes de symétrie du rectangle.

Losanges Un parallélogramme est un *losange* si les conditions suivantes équivalentes sont vérifiées :
1) deux côtés consécutifs sont égaux (et donc les quatre) ;
2) les diagonales sont perpendiculaires ;
3) les diagonales bissectent les angles.
Preuve de 3)$\Rightarrow$ 1) : Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Si (AC) est une bissectrice de $\widehat{BCD}$ alors $\widehat{BCA} = \widehat{ACD}$ et d'autre part $\widehat{ACD} = \widehat{BAC}$ (angles alternes-internes). Donc $\widehat{ACB} = \widehat{BAC}$ donc ABC est isocèle en B, donc $AB = BC$ et donc $ABCD$ est un losange.



Tout quadrilatère *convexe* ayant quatre côtés égaux est un losange.

Les diagonales d'un losange en sont des axes de symétrie. En effet, elles sont médiatrices l'un de l'autre.

Carrés Un carré est un losange qui a un angle droit ou bien un rectangle ayant deux côtés consécutifs égaux. Autrement dit c'est à la fois un losange et un rectangle.

Un carré possède quatre axes de symétrie : les deux diagonales et les deux médiatrices des paires de côtés opposés.

Trapèzes Un trapèze est un quadrilatère convexe qui a deux côtés parallèles.

Cas particuliers : trapèze rectangle, trapèze isocèle (qui a des côtés non parallèles égaux). Un trapèze est isocèle ssi deux angles adjacents à une même base sont égaux.

Axes de symétrie, cercle circonscrit à un trapèze isocèle (les quatre médiatrices sont concourantes grâce à l'axe de symétrie).

5 Parallèles équidistantes

Théorème : lorsque des droites parallèles déterminent des segments égaux sur une sécante, elles déterminent des segments égaux sur toute autre sécante. Preuve : angles correspondants et cas d'égalité des triangles.

Droite des milieux dans un triangle : Théorème : le segment joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième et égal à sa moitié.

Base moyenne d'un trapèze : égale à la demi-somme (moyenne arithmétique)

5.1 Droites concourantes dans un triangle

On a déjà vu que les médiatrices et les bissectrices sont concourantes.

Théorème : les hauteurs sont concourantes. Preuve : on mène les parallèles aux côtés passant par les sommets opposés : les anciennes hauteurs sont les nouvelles médiatrices. Le point de concours est l'orthocentre.

Remarque importante : l'un quelconque des quatre points A, B, C, H est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres.

Théorème : les médianes sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle, situé au tiers de chaque médiane. Preuve : parallélogramme dans le triangle avec théorème des milieux. On montre que l'intersection de deux médianes est au tiers en partant du côté. Il en est de même de la troisième.

Bissectrices extérieures, cercles exinscrits. Preuve : les bissectrices extérieures se croisent en un point qui est équidistant des trois côtés (prolongés) : ce point est donc sur la bissectrice (intérieure) du dernier sommet.

Application : construire la bissectrice de deux droites dont on ne voit pas le point d'intersection.

5.2 Cercle

Par trois points non alignés passe un unique cercle, par trois points alignés ne passe aucun cercle. Conséquence : une droite et un cercle s'intersectent en au plus deux points. Deux cercles s'intersectent en au plus deux points.

Positions relatives d'un cercle et d'une droite (disjoints, sécants, tangents) suivant le nombre de points d'intersection. Caractérisation métrique : une droite est sécante, tangente, ou disjointe d'un cercle si sa distance au centre est strictement inférieure, égale, ou strictement supérieure au rayon. Une droite est donc tangente à un cercle ssi elle est perpendiculaire à un rayon en son extrémité.

Position relative de deux cercles : extérieurs ou intérieurs, sécants, tangents intérieurement ou extérieurement, suivant la comparaison entre OO', $r + r'$ et $r - r'$.

Cordes.

Théorème 5.1. Le diamètre perpendiculaire à une corde passe par son milieu, et par le milieu des deux arcs qu'elle sous-tend.

Preuve : utiliser des triangles isocèles.

Deux sécantes parallèles interceptent des arcs égaux. Deux cordes égales sont équidistantes du centre.

La suite concerne les angles inscrits et les quadrilatères inscriptibles.