# Géométrie « sans calculs »

**Exercice 1.** [Théorème de Varignon] Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, et $I$, $J$, $K$, $L$ les milieux de ses côtés. Montrer que $IJKL$ est un parallélogramme. Montrer que l'aire de $ABCD$ est le double de celle de $IJKL$.

**Exercice 2.** [Trapèze rectangle] Soit $\mathscr{D}$ une droite, $A$ et $B$ deux points hors de cette droite, et $A'$, $B'$ leurs projetés orthogonaux sur $\mathscr{D}$, supposés distincts. Soit enfin $I$ le milieu de $[AB]$. Montrer que $A'IB'$ est isocèle en $I$.

**Exercice 3.** Sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$ d'un carré direct $ABCD$, on place des points $M$ et $N$vérifiant $AM = BN$. Soit $H$ le point d'intersection des droites $(AN)$ et $(CM)$. Montrer que $H$ est l'orthocentre du triangle $DMN$.

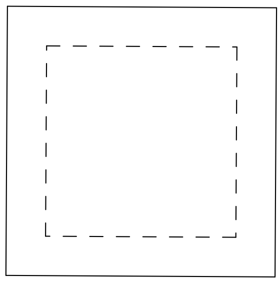
**Exercice 4.** Soit $ABC$ un triangle équilatéral. Pour tout point $M$ à l'intérieur du triangle, on note $d = dist(M,[AB]) + dist(M,[BC]) + dist(M,[AC])$ la somme des distances de $M$ aux trois côtés. Montrer que $d$ ne dépend en fait pas du point $M$.

**Exercice 5.** Soit $ABC$ un triangle et $I$ le centre de son cercle inscrit, dont on note $r$ le rayon. Montrer qu'un des sommets du triangle est à distance $\geq 2r$ de $I$, et qu'un autre est à distance $\leq 2r$.

**Exercice 6.** Montrer que si un cercle est tangent aux quatre côtés d'un quadrilatère $ABCD$, alors $AB + CD = BC + AD$. Réciproque ?

**Exercice 7.** Soit $ABC$ un triangle avec $AB = 2BC$ et $M$ un point de $[AC]$ tel que $AM = 2MC$. Comparer les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{MBC}$.

**Exercice 8.** [Cloître] On se donne un carré, et on cherche à construire un carré de même centre, aux côtés parallèles, et d'aire deux fois plus petite, comme ci-dessous :



1. (Question intermédiaire) Soit $\mathscr{C}$ un cercle. Montrer qu'un carré circonscrit au cercle a une aire deux fois plus grande qu'un carré inscrit dans le cercle.
2. En déduire une solution au problème initial.

**Exercice 9.** [Le tourniquet dans le triangle] Par un point $D$ du côté $[AB]$ d'un triangle $ABC$, on trace la parallèle à $[BC]$ qui coupe $[AC]$ en $E$. Par $E$ on trace la parallèle à $[AB]$ qui coupe $[CB]$ en $F$. Par $F$ on trace la parallèle à $[AC]$ qui coupe $[BC]$ en $G$. On construit de même $H$, $I$ et $J$. Montrer que $J = D$.

## Indications

**Exercice 1.** Méthodologie : de quels théorèmes dispose-t-on ? Lesquels concernent le parallélisme ? Pour l'aire, considérer l'aire du complémentaire de $IJKL$ par exemple, ou bien utiliser les diagonales de $ABCD$.
**Exercice 2.** Les diagonales d'un rectangle sont égales et se coupent en leur milieu.
**Exercice 4.** Méthodologie : essayer avec plusieurs points $M$. Que remarque-t-on ?
**Exercice 5.** Écrire les distances aux sommets en fonction des angles du triangle.
**Exercice 6.** Triangles isocèles.
**Exercice 7.** Où se trouve le point $M$ sur le segment $[AC]$ ?
**Exercice 8.** Faire tourner le carré circonscrit par rapport au carré inscrit.
**Exercice 9.** Considérer l'application du segment $[AB]$ dans lui-même qui a un point $D$ sur le segment associe $G$ comme construit dans l'énoncé. Que dire si $D$ est une des extrémités du segment ? Que peut-on dire de cette application ?