Club Mathématique de Nancy

Première séance, 31 mai 2017
Autour du principe des tiroirs

Elèves présents en mai-juin 2017 : Alice S., Alice V., Anis-Samy, Constant, Esteban, Evelyne, Hugo, Justine, Léo, Louis, Louise, Maxence.
Encadrants : Damien, Régine, Tom.

On commence par discuter autour de deux exercices au tableau :

♣ **Exercice 1**
Dans le collège de Nancy-plage, il y a 400 élèves.
Montrer que deux élèves au moins fêtent leur anniversaire le même jour.

♣ **Exercice 2**
Dans son tiroir, Stanislas a des chaussettes bleues, vertes et rouges. Il fait noir.
Combien de chaussettes doit-il prendre dans son tiroir pour être sûr d'en avoir (au moins) deux de la même couleur ?

On essaie de dégager un principe général :

Principe des tiroirs. Si je range $n+1$ objets dans n tiroirs, alors il y a au moins un tiroir qui contient au moins deux objets.

Tom propose de modifier l'exercice 1 : combien d'élèves doit avoir le collège pour être sûr qu'au moins trois élèves fêtent leur anniversaire le même jour ? On réfléchit à

? Question ? On a n tiroirs, combien d'objets doit-on ranger dedans pour être sûr qu'au moins un tiroir en contienne au moins 3 ? La réponse est $2n+1$ (penser au pire cas)

Et zou, nouveau principe général :

Super-Principe des tiroirs. Si je range $(k-1)n+1$ objets dans n tiroirs, alors il y a au moins un tiroir qui contient au moins k objets.

En fait, après une remarque de Louis, on se dit c'est mieux de ne pas retenir la formule, qu'il vaut mieux la retrouver en pensant au pire des cas (et/ou en faisant un dessin). Mais Tom a une nouvelle question :

? Question ? Si je range A objets dans n tiroirs, il y a au moins un tiroir qui contient au moins b objets. Quel est le plus grand b qu'on peut mettre pour que cette phrase soit juste ?

Conjecture. On fait la division de A par n, et pour obtenir b on arrondit à l'entier supérieur.

Définition : • la partie entière inférieure d'un nombre a, notée $\lfloor a \rfloor$, est le plus petit nombre entier supérieur ou égal à a ; • la partie entière supérieure d'un nombre a, notée $\lceil a \rceil$, est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à a.

▷ **Exemple.** $\lfloor 3 \rfloor = \lceil 3 \rceil = 3$; $\lfloor 3,15 \rfloor = 3$ et $\lceil 3,15 \rceil = 4$; $\lfloor -2,7 \rfloor = -3$ et $\lceil -2,7 \rceil = -2$
Eh eh du coup on reformule notre conjecture :

Conjecture. Si je range A objets dans n tiroirs, il y a au moins un tiroir qui contient au moins $\lceil A/n \rceil$ objets.

On décide de réfléchir ‘a une preuve de cette conjecture pour la prochaine fois (penser au pire cas !), et on passe à l'exercice suivant :

♣ Exercice 3
Montrer que le développement décimal d'un nombre rationnel est périodique à partir d'un certain rang.

Alors là, il faut qu'on précise un certain nombre de choses avant de commencer :
- un nombre rationnel positif est le quotient de deux entiers : il s'écrit donc p/q. En simplifiant la fraction, on peut supposer que p et q n'ont aucun facteur commun.
- le développement décimal est l'écriture "avec des chiffres après la virgule".
  ▷ **Exemple.** $\frac{1}{3} = 0,33333...$

On discute aussi de plein de choses :
- on révise la division posée en calculant le développement décimal de $\frac{1}{7}$... Ah ben oui il est périodique $\frac{1}{7} = 0,14285714285....$ On essaie de comprendre sur cet exemple pourquoi le développement est périodique.
- Quelqu'un demande s'il y a des nombres qui ne sont pas rationnels et comment on les appelle : la réponse est oui, ce sont les nombres irrationnels. Par exemple $\sqrt{2}$ (à voir dans une prochaine séance ?)
- On se pose aussi la question de la réciproque de l'exercice : si un nombre a un développement périodique à partir d'un certain rang, est-ce qu'il est rationnel ?
  ▷ **Exemple.** le nombre $13,23575757...$ s'écrit-il comme le quotient de deux nombres entiers ?
- $0,99999.... = 1$: Louis nous le montre en disant que c'est $3 \times 0,3333... = 3 \times \frac{1}{3} = 1$. On se pose la question de ce qu'on a le droit d'écrire. Quelle est la signification de $0,9999\ldots$? Damien explique pour pour donner une signification à cette écriture, il faut parler de série géométrique (ceux qui ont fait une première S connaissent...), et qu'on essaiera d'en parler à une autre séance. En mathématique, on essaie de ne manipuler que des objets bien définis et de ne faire des choses qu'on a le droit de faire...
  ▷ **Exemple.** on ne divise pas un nombre par 0 ! ! !
- Ca fuse de partout ! Il paraitrait que la somme de tous les entiers fait $-1/12$! ! ! Tom explique qu'on trouve plein de preuves (fausses !) de ce (faux) résultat et que le jeu est d'essayer de trouver où est l'arnaque... On essaiera peut-être lors d'une prochaine séance.

Mais tout ça nous éloigne de l'exercice 3 ! ! ! Et la séance se termine déjà... On se dit à la semaine prochaine, et en attendant, on réfléchit à notre conjecture, et à l'exercice 3.

☺ Indication de Damien : Mais où sont les tiroirs ?

Allez, un petit dernier pour la route :

♣ Exercice 4
On place quatre points sur un cercle de rayon 1.
Montrer qu'il y en a deux qui sont à distance inférieure ou égale à $\sqrt{2}$.