SUJET D'EXAMEN

DIPLÔME : Licence de mathématiques UE : Proba. et Stat. pour l'enseignement (UE605) Semestre : 6 Epreuve de : probabilités et statistiques Session : 1 Date : 27 mai 2019 Horaire : 9H–12H	Durée du sujet : 3H Nom du rédacteur : JS. Giet ■ Documents autorisés : 4 pages A4 ☐ Documents non autorisés ■ Calculatrices autorisées ☐ Calculatrices non autorisées

EXERCICE 1 (9 points)
On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires (v.a.) gaussiennes centrées, réduites, indépendantes. On rappelle que le moment d'ordre 4 de la loi normale standard est égal à 3 et que sa fonction de répartition Φ vérifie :
$\Phi(1) \simeq 0,84$; $\Phi(1,64) \simeq 0,95$; $\Phi(1,96) \simeq 0,975$; $\Phi(3) \simeq 0,999$.

1. (1 point) Exprimer $\mathbb{P}(\{-4 < 2X_1 + 2 < 8\})$ au moyen de la fonction de répartition Φ de la v.a. X_1 et en donner une approximation à $0,01$ près.
2. (1 point) Préciser les quatre espérances suivantes en évitant de calculer la moindre intégrale : $\mathbb{E}[X_1]$, $\mathbb{E}[X_1^2]$, $\mathbb{E}[2X_1 + X_2^2]$, $\mathbb{E}[X_1^4]$.
3. (1 point) Préciser la loi de la v.a. $X_1 + 2X_2$, puis en déduire le nom de la loi de la v.a. $\frac{1}{5}(X_1 + 2X_2)^2$.
4. (1 point) Calculer $\mathrm{Var}(X_1^2)$.
5. (1 point) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant que la v.a $X_1^2 + \ldots + X_n^2$ suit la loi du χ^2 à n degrés de liberté, calculer la moyenne et la variance de la loi du χ^2 à n degrés de liberté.
6. (1 point) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser la loi de la v.a. $\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}}$.
7. (1 point) En déduire une valeur approchée de $\mathbb{P}(\{X_1 + \ldots + X_{1000} \leq \sqrt{1000}\})$.
8. (2 points) Montrer que la suite de v.a. $\dfrac{X_1^2 + \ldots + X_n^2 - n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $X_1 + X_2$.

EXERCICE 2 (6 points + 3 points bonus)
Soit $n = 1600$. On considère une série statistique $(x_1, \ldots, x_n)$. On a calculé :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 3945 \simeq 2,4656 \times n \ ; \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 24696 = 15,435 \times n \simeq 15,445 \times (n-1).$$

On note $(X_1, \ldots, X_n)$ le vecteur aléatoire dont la série statistique $(x_1, \ldots, x_n)$ est une réalisation. Les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées.
On note μ la moyenne des v.a. X_i et σ leur écart-type (et donc σ^2 leur variance).
On suppose que les v.a. X_i sont de carré intégrable.

1. (1 point) Calculer $\mathbb{E}[\overline{X}_n]$ et $\mathrm{Var}(\overline{X}_n)$ en fonction de n, μ et σ.

2. (1 point) Comme n est grand, que peut-on dire de la loi de $\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$?
3. (1 point) On suppose que $\sigma = 3$ dans cette question. Donner un intervalle de confiance de la moyenne μ de niveau de confiance 95%.
4. (1 point) Dans cette question et la suivante, on suppose toujours l'écart-type σ connu, $\sigma = 3$, mais aussi que les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sont normales.

   Préciser un intervalle de fluctuation à 95% de la moyenne $\overline{X}_n$ sous l'hypothèse H_0 : $\mu = 0$.
5. (1 point) En déduire le rejet ou non de l'hypothèse $H_0 : \mu = 0$ au risque de première espèce de 5% ; on rappelle que $\sigma = 3$ dans cette question.
6. (1 point) Déterminer un intervalle de confiance de la moyenne μ sans supposer la variance σ^2 connue.
7. (3 points bonus) Dans cette question, on suppose les v.a. $X_i - \frac{5}{2}$ centrées et normales. Déterminer un intervalle de confiance de la variance σ^2 de niveau de confiance 95%. On donne deux quantiles de la loi du χ^2 à $n = 1600$ degrés de liberté :

$$W \sim \chi^2(1600) \implies \mathbb{P}(W \leq 1713) \simeq 0,975, \ \mathbb{P}(W \leq 1491) \simeq 0,025.$$

EXERCICE 4 (5 points)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Soit Z une v.a. gaussienne standard. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (1 point) Calculer la fonction génératrice G commune aux v.a. X_i.
2. (1 point) En déduire la fonction génératrice G_{S_n} de S_n puis le nom et le paramètre de la loi de S_n.
3. (1 point) Montrer que la suite de v.a. $\frac{S_n - \lambda n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\sqrt{\lambda}Z$.
4. (1 point) Quelle est la limite presque sûre de $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
5. (1 point) On émet l'hypothèse que $\lambda = 1$. Déduire de la question 3 un intervalle de fluctuation à 95% de $\dfrac{S_n}{n}$ si n est très grand.