SUJET D'EXAMEN PARTIEL

DIPLÔME : Licence de mathématiques 3e année PT mathématiques et enseignement Épreuve de : Probabilités et Statistique pour l'Enseignement	Durée du sujet : 2h Nom du rédacteur : JS. Giet
Session : avril 2019 Date : 1er avril 2019 Horaire : 10h–12h + tiers temps éventuel	■ Documents autorisés : 2 pages A4 ☐ Documents non autorisés ☐ Calculatrices autorisées ■ Calculatrices non autorisées

Exercice 1 (3 points +1 point bonus).

Soit Ω un ensemble non vide. Soit l'application ϕ, de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω, dans l'ensemble $\{0,1\}^\Omega$ des applications de Ω dans $\{0,1\}$, définie par

$$A \subset \Omega,\ \phi(A) = \mathbb{1}_A.$$

Soit l'application $\psi : \{0,1\}^\Omega \to \mathcal{P}(\Omega)$, définie par

$$f \in \{0,1\}^\Omega,\ \psi(f) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = 1\} = f^{-1}(\{1\}).$$

1. (1 point) Calculer $\psi \circ \phi$.
2. (1 point) En déduire une démonstration de l'injectivité de ϕ.
3. (1 point) Montrer que ϕ est bijective.
4. (1 point bonus) On suppose que Ω est un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![1,n]\!]$.
   Préciser le cardinal de l'ensemble B_p des applications de Ω dans $\{0,1\}$ telles que l'image réciproque de 1 est de cardinal p :
   $$B_p = \{f \in \{0,1\}^\Omega : |f^{-1}(\{1\})| = p\}.$$

Exercice 2 (5 points)

On considère l'espace probabilisable $(\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{P}(\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}))$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^* = \{1,2,\ldots\}$, soit $S_n = \{u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} : u_n = 0\}$.
Soient $S = \{u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} : \{i \in \mathbb{N}^* : u_i = 0\}$ est une partie finie de $\mathbb{N}^*\}$ et $E = \{u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} : \{i \in \mathbb{N}^* : u_i = 1\}$ est une partie finie de $\mathbb{N}^*\}$.

1. (1 point) Montrer que les événements S et E sont incompatibles.

2. (0,5 point) En déduire $\overline{S} \cup \overline{E}$.
3. (1 point) Montrer que $\{S, \overline{S} \cap \overline{E}, E\}$ est un système complet d'événements.
4. (1 point) Soit $v \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} = 0$, $v_{2n+1} = 1$.
   Préciser dans quel événement du système complet $\{S, \overline{S} \cap \overline{E}, E\}$ se trouve v.
   Même question avec la suite z consituée exclusivement de 0 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = 0$.
5. (1,5 point) Exprimer en fonction des événements S et E, les limites supérieures et inférieures des suites d'événements suivantes :

$$\overline{\lim_n}\, S_n \ ; \ \underline{\lim_n}\, S_n \ ; \ \overline{\lim_n}\, \overline{S_n}.$$

Exercice 3 (5 points + 1 point bonus)

On considère un schéma infini de Bernoulli où un échec a une probabilité $p \in]0,1[$ d'arriver et un succès une probabilité $1-p$.
On note l'espace probabilisé correspondant $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. On convient qu'un "1" correspond à un échec et un "0" à un succès.
Pour tout entier naturel n, on définit l'événement $B_n = \{1\}^n \times \{0,1\}^{\{n+1,n+2,\ldots\}}$ ="uniquement des échecs lors des n premières épreuves" de probabilité p^n ; avec cette définition, $B_0 = \Omega$.

1. (1,5 point) Préciser la définition de l'événement $\lim\limits_n B_n$.
   Décrire par une phrase cet événement $\lim\limits_n B_n$ et démontrer qu'il est négligeable.
2. (1 point) Décrire par une phrase l'événement $\overline{B_n}$ et préciser sa probabilité.
3. (1 point) Montrer que la suite d'événements $\left(\overline{B_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
4. (0,5 point) Calculer la probabilité de $\overline{B_n} \setminus \overline{B_{n-1}}$.
5. (1 point) Décrire l'événement $\overline{B_n} \setminus \overline{B_{n-1}}$.
6. (1 point bonus) Donner un système complet d'événements à partir des événements précédents.

Exercice 4 (7 points + 1 point bonus)

Un code informatique comporte une clé cachée en son sein. Le code est formé de $n = 274$ parties d'égales longueurs. Pour tout entier $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note A_i l'événement « la clé se trouve dans la i^e partie » et a donc pour probabilité $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{n}$; en effet, comme il y a (au moins) une clé, l'événement $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ est presque sûr pour la probabilité $\mathbb{P}$ et comme il y a (au plus) une clé, les événements A_1, ..., A_n sont incompatibles deux à deux.

1. $(0,5$ point) Que vaut $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$?
2. (1 point) Justifier que les événements A_1 et A_2 ne sont pas indépendants.
3. $(0,5$ point) Que vaut la probabilité $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$ que la clé se trouve dans la partie 1 ou dans la partie 2 ?
4. (1 point) Préciser $\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ pour ensuite en déduire $\mathbb{P}(\overline{A_1} \cap A_2)$.

5. (1 point) En déduire la probabilité $P_{\overline{A_1}}(A_2)$ de l'événement $A_2 =$ « la clé se trouve dans la 2^e partie » sachant l'événement $\overline{A_1} =$ « la clé ne se trouve pas dans la première partie du code ».
6. (1 point) Que peut-on dire de l'événement $A_2 \cup \cdots \cup A_n$ pour la probabilité conditionnelle à l'événement $\overline{A_1}$, $P_{\overline{A_1}}$?
7. (1 point bonus) En déduire un nouveau calcul direct de $P_{\overline{A_1}}(A_2)$.
8. (1 point) Calculer sans justifier (mais sans erreur) la probabilité que la clé se trouve dans les parties 9, 10 ou 11 sachant qu'elle n'est pas dans les huit premières parties examinées.
9. (1 point) Soient i, j et k sont trois entiers strictement positifs tels que $i+j+k = n$; on a examiné i parties sans trouver la clé, quelle est la probabilité de trouver la clé parmi les j prochaines sur les $j+k$ parties restant à explorer ?