SUJET D'EXAMEN

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 3H 00
UE : Probabilités et Statistiques	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 6	
Epreuve de :	■ Documents autorisés
Session ......2........	☐ Documents non autorisés
Date : 22 juin 2020	■ Calculatrices autorisées
Horaire : 09H00–12H00	☐ Calculatrice non autorisée

Le sujet est constitué de deux exercices et d'un problème indépendants. Tout résultat donné dans l'énoncé peut être admis pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble $\{2,3,4\}$.

1. Calculer $\mathbb{E}(\log X_1)$.
2. On pose
$$Q_n = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n.$$
Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} Q_n^{1/n} = 2\sqrt[3]{3} \text{ p.s.}$$

Exercice 2

Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ suivant la loi uniforme sur le disque unité :
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}.$$
On définit la variable aléatoire $R = \sqrt{X^2+Y^2}$.
Déterminer un réel r tel que $P(R > r) = P(R < r)$.
(On aura tout intérêt à faire un dessin).

Problème

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que l'on ait :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \mathbb{E}(e^{zX_1})$.

1. (a) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a

$$g(z) = \cosh z$$

   (b) Calculer la fonction caractéristique de X_1, puis la fonction caractéristique de $-X_1$.

   (c) Montrer que S_n et $-S_n$ ont même loi.

2. Montrer que pour tout réel u, on a

$$g(u) \leq \exp(\frac{u^2}{2}).$$

   (On pourra utiliser un développement en série entière.)

3. Soit n un entier strictement positif et $\alpha > 0$.

   (a) Montrer que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad \mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \leq \frac{g(u)^n}{e^{n\alpha u}}$$

   (b) En déduire que

$$\mathbb{P}(S_n \geq n\alpha) \leq \exp(-n\frac{\alpha^2}{2}).$$

   (c) Montrer soigneusement que

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq n\alpha) \leq 2\exp(-n\frac{\alpha^2}{2}).$$

4. (a) Montrer que quels que soient les réels $\gamma > 0$ et $\delta > 0$, la série de terme général $(\exp(-\delta n^{\gamma}))_{n\geq 0}$ converge.

   (b) Soit $\beta > \frac{1}{2}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^{\beta}} = 0 \text{ presque sûrement.}$$

FIN