SUJET DE CONTRÔLE CONTINU

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : quelques heures
UE : Probabilités et Statistiques	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 6	
Epreuve de :	■ Documents autorisés
Session ......1........	☐ Documents non autorisés
Date : 10 avril 2020	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : de 6h à 23h59	■ Calculatrice autorisée

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathrm{Var}(X)$. 4 point(s)
2. Pour $n \geq 1$, calculer $\mathbb{E}(X^n)$. 2 point(s)
3. Calculer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de $\mathbb{E}\left(\frac{(1+X)^n}{n!}\right)$. 3 point(s)

Exercice 2 $X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1,2,3,4,5,6\}$. On pose

$$S = \mathbb{1}_{\{X_1=1\}} + \mathbb{1}_{\{X_2=1\}} + \mathbb{1}_{\{X_3=1\}},$$
$$T = \mathbb{1}_{\{X_1=1\}} + \mathbb{1}_{\{X_2=1\}} + \mathbb{1}_{\{X_3=1\}} + \mathbb{1}_{\{X_4=1\}} + \mathbb{1}_{\{X_5=1\}}$$

et on note A l'événement $\{X_0 \text{ est pair}\}$. On pose enfin

$$R(\omega) = \begin{cases} S(\omega) & \text{si } \omega \in A \\ T(\omega) & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Loi de S, loi de T 3 point(s)
2. Calculer la fonction génératrice de S, de T. 2 point(s)
3. Calculer la fonction génératrice de R. 3 point(s)

Exercice 3 Soit A et B deux points choisis indépendamment et de manière uniforme dans un carré de côté 1. On note $d(A,B)$ la distance euclidienne entre A et B et O le centre du carré.

1. Calculer $\mathbb{P}(d(O,A) \leq \frac{1}{2})$. 3 point(s)
2. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \mathbb{P}(d(A,B) \leq 1/n) = \pi.$$
(On pourra penser au théorème de convergence dominée.) hors-barème, jackpot possible
3. Calculer $\mathbb{P}(d(A,B) \leq 1)$. hors-barème, jackpot possible

FIN

Commentaires : attention à bien donner tous les arguments, en particulier d'indépendance, pas faire seulement les calculs.

Certains n'ont pas encore mémorisé qu'une somme de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre suit une loi binomiale et refont la preuve. C'est une lacune : au niveau L3, ce résultat est réputé connu.

Globalement, le travail est très sérieux, et j'ai apprécié les efforts sur la présentation.

1 Solutions

Solution 1

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^n) &= \int_{\mathbb{R}} x^n \, d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} x^n e^{-x} \, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} x^{n-1} e^{-x} \, d\lambda(x) \\ &= \Gamma(n+1) = n!.\end{aligned}$$

En particulier $\mathbb{E}(X) = 1! = 1$, $\mathbb{E}(X^2) = 2! = 2$,
$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 2 - 1 = 1$.

$(X+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$, donc

$$\mathbb{E}(X+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathbb{E}(X^k) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} k!$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}(X+1)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \\ &\to e.\end{aligned}$$

Solution 2

S est la somme de 3 variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$, donc $S \sim \mathcal{N}(n = 3, p = \frac{1}{6})$. T est la somme de 3 variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$, donc $S \sim \mathcal{N}(n = 5, p = \frac{1}{6})$.

On en déduit immédiatement $G_S(x) = (\frac{5}{6} + \frac{1}{6}x)^3$ et $G_T(x) = (\frac{5}{6} + \frac{1}{6}x)^5$.

$$x^{R(\omega)} = \begin{cases} x^{S(\omega)} & \text{si } \omega \in A \\ x^{T(\omega)} & \text{sinon} \end{cases},$$

soit

$$x^R = \mathbb{1}_A x^S + \mathbb{1}_{A^c} x^T.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} G_R(x) &= \mathbb{E}(x^R) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A x^S) + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A^c} x^T) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}(A))\mathbb{E}(x^S) + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A^c})\mathbb{E}(x^T) \text{ par indépendance} \\ &= \mathbb{P}(A)G_S(x) + (1-\mathbb{P}(A))G_T(x) \\ &= \frac{(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}x)^3 + (\frac{5}{6}+\frac{1}{6}x)^5}{2} \end{aligned}$$

Solution 3

1. $d(O,A) \leq \frac{1}{2} \iff A \in B(O,1/2)$. Comme A suit la loi uniforme sur le carré, on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(d(O,A) \leq \frac{1}{2}) = \mathbb{P}(A \in B(O,1/2)) &= \frac{\lambda(B(O,1/2)\cap C)}{\lambda(C)} = \frac{\lambda(B(O,1/2))}{\lambda(C)} \\ &= \frac{\pi(1/2)^2}{1} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2. On note $C = [0,1]^2$ le carré unité. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(d(A,B) \leq \frac{1}{n}\right) &= \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{\|x-y\|\leq 1/n\}} \; d\mathbb{P}_{(A,B)}(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{\|x-y\|\leq 1/n\}} \; (d\mathcal{U}(C)\otimes\mathcal{U}(C))(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{B(x,1/n)}(y) \; (d\mathcal{U}(C)\otimes\mathcal{U}(C))(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \lambda^2(C\cap B(x,1/n)) \; d\mathcal{U}(C)(x), \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du théorème de Tonelli. On a donc

$$n^2\mathbb{P}\left(d(A,B) \leq \frac{1}{n}\right) = \int_C f_n(x) \; d\lambda^2(x),$$

avec $f_n(x) = n^2\lambda^2(C\cap B(x,1/n))$. On a

- pour tout x dans C et tout $n \geq 1$,

$$|f_n(x)| \leq n^2\lambda^2(B(x,1/n)) = n^2\lambda^2(B(0,1/n)) = \lambda^2(B(0,1)) = \pi.$$

— Pour tout $x \in \mathring{C}$, on a $C\cap B(x,1/n) = B(x,1/n)$ pour n assez grand, et donc à partir d'un certain rang $f_n(x) = n^2\lambda^2(B(x,1/n)) = \pi$; Comme $\lambda^2(C\backslash\mathring{C}) = 0$, $f_n(x)$ converge presque partout vers π ;

— π est intégrable par rapport à λ^2 sur C.

Le théorème de convergence dominée entraîne alors que

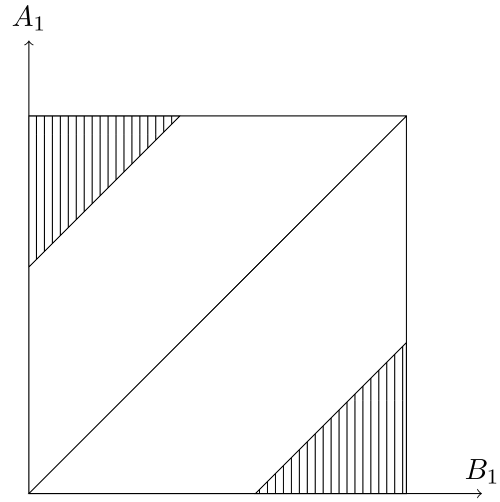
$$\lim_{n\to+\infty}\int_C f_n(x) \; d\lambda^2(x) = \int_C \pi \; d\lambda^2 = \pi,$$

ce qui est le résultat voulu.

3. On note (A_1,A_2) et (B_1,B_2) les coordonnées respectives de A et B. A_1, A_2, A_3, A_4 sont des variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$S = d(A,B)^2 = (A_1-B_1)^2 + (A_2-B_2)^2.$$

On commence par calculer la loi de $D_1 = (A_1 - B_1)^2$, qui est aussi celle de $D_2 = (A_2 - B_2)^2$ (c'est la loi image de $\mathcal{U}([0,1])^{\otimes 2} = \mathcal{U}([0,1]^2)$ par $(u,v) \mapsto (u-v)^2$). Elle prend bien sûr ses valeurs dans $[0,1]$.
Observons d'abord $|A_1 - B_1|$, et prenons $a \in [0,1]$.
On a $\mathbb{P}(|A_1 - B_1| > a) = \mathbb{P}((A_1, B_1) \in C_a) = \lambda^2(C_a)$, où C_a est la réunion des petits triangles hachurés représentés ci-dessous.



On a donc $\mathbb{P}(|A_1 - B_1| > a) = 2 \times \frac{(1-a)^2}{2} = (1-a)^2$ et

$$\mathbb{P}(|A_1 - B_1| \leq a) = 1 - (1-a)^2 = a(2-a).$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(D_1 \leq a) = \mathbb{P}(|A_1 - B_1|^2 \leq a) = \mathbb{P}(|A_1 - B_1| \leq \sqrt{a}) = 2\sqrt{a} - a.$$

La fonction de répartition de D_1 étant continue et C^1 par morceaux, on en déduit que D_1 est une variable aléatoire a densité, de densité

$$f(t) = (\frac{1}{\sqrt{t}} - 1)\mathbb{1}_{[0,1]}(t).$$

Comme D_1 et D_2 sont positives, à densité, et de même loi, on en déduit que leur somme $S = D_1 + D_2$ est également une variable positive à densité donnée par

$$f_S(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) f(x-t)\ d\lambda(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \int_0^x f(t) f(x-t)\ dt.$$

Supposons $x \in]0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
f_S(x) &= \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x-t}} - 1\right)\ dt \\
&= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{x-t}} + 1\ dt \\
&= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\ dt - 2\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt + x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\ d\theta - 4\sqrt{x} + x,
\end{aligned}$$

avec le changement de variables $t = \theta x$.
Posons $K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\ d\theta$. Il faut calculer K. Plusieurs méthodes sont possibles.

— la méthode savante : on peut dire que $K = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$;

— La méthode manuelle : le changement de variable $\theta = \sin^2 u$ donne facilement $K = \int_0^{\pi/2} 2\ du = \pi$;

— La méthode maligne, à l'aide de la question 1). Pour $t \in [0,1]$, on a

$$\mathbb{P}(S \le t) = \int_0^t f_S(x)\ dx = Kt - \frac{8}{3}t^{3/2} + \frac{t^2}{2}$$

En particulier

$$\mathbb{P}(S \le \frac{1}{n^2}) = \frac{K}{n^2} - \frac{8}{3n^3} + \frac{1}{2n^4} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} n^2 \mathbb{P}(S \le \frac{1}{n^2}) = K.$$

Mais on a montré à la première question que cette limite vaut π, donc $K = \pi$.

Finalement,

$$\mathbb{P}(S \le 1) = \pi - \frac{8}{3} + \frac{1}{2} = \pi - \frac{13}{6}.$$

On termine par une petite simulation à l'aide de la méthode de Monte–Carlo, ici en Julia.

```julia
function test(N)
 s=0
 for i=1:N
  a=(rand()-rand())^2
  b=(rand()-rand())^2
  s+=(a+b<1)
 end
 return(s/N)
end
```

On lance :

```
julia> test(10^8)
0.97494781

julia> pi-13/6
0.9749259869231266
```

Ca a l'air bon !

On reviendra en cours sur ces histoires de simulation.

Si vous êtes intéressés par la découverte, du (super !) langage Julia, vous pivez lire en ligne mon livre
http://www.iecl.univ-lorraine.fr/~Olivier.Garet/livre_julia/.

Si vous êtes un(e) étudiant(e) motivé(e), je peux même vous envoyer le pdf du livre sur simple demande. . .

Pour être complet, on peut terminer de calculer la densité de la loi de S. Pour x entre 1 et 2, on écrit

$$\begin{aligned}
f_S(x) &= \int_0^x f(t)f(x-t)\ dt \\
&= \int_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{t}}-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x-t}}-1\right) \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\mathbb{1}_{[0,1]}(x-t)\ dt \\
&= \int_{x-1}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{t}}-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x-t}}-1\right)\ dt \\
&= \int_{x-1}^1 dt - 2\int_{x-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_{x-1}^1 \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}}\ dt \\
&= (2-x) - 4(1-\sqrt{x-1}) + \left[\arcsin\left(\frac{2t-x}{x}\right)\right]_{x-1}^1 \\
&= -2-x+4\sqrt{x-1}+2\arcsin\left(\frac{2-x}{x}\right).
\end{aligned}$$

Précisons comment est calculée la primitive : Pour $a<0$, b, c, x, réels avec $\Delta = b^2-4ac>0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= \frac{1}{4a}\left((2ax+b)^2-\Delta\right) \\
&= -\frac{\Delta}{4a}\left(1-\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} &= \frac{2\sqrt{-a}}{\sqrt{\Delta}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{-a}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2}} \times \frac{2a}{\sqrt{\Delta}}
\end{aligned}$$

Comme une primitive de $x\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est arcsin, une primitive de $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ est

$$x\mapsto -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right) = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{-2ax-b}{\sqrt{\Delta}}\right).$$