SUJET D'EXAMEN TERMINAL

DIPLOME : Licence de Mathématiques UE : Probabilités et Statistiques Semestre : 6 Epreuve de : Session ......2........ Date : 25 juin 2019 Horaire : 13H30–16H30	Durée du sujet : 3H 00 Nom du rédacteur : O. GARET ■ 4 pages autorisées ☐ Documents non autorisés ☐ Calculatrices autorisées ■ Calculatrice non autorisée

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$ suivant la loi uniforme sur le disque unité :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}.$$

On définit la variable aléatoire $R = \sqrt{X^2+Y^2}$.
Déterminer un réel r tel que $\mathbb{P}(R > r) = \mathbb{P}(R < r)$.
(On aura tout intérêt à faire un dessin).

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle compact $[0;2]$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^3.$$

Montrer que S_n/n converge presque sûrement et déterminer sa limite. Montrer que $\frac{S_n-2n}{\sqrt{n}}$ converge en loi et déterminer sa limite.

Exercice 3 On rappelle l'énoncé du théorème de point fixe de Banach :

Théorème 1 *Soit (E,d) un espace métrique complet non-vide et $T : E \longmapsto E$ une application contractante, c'est-à-dire telle qu'il existe $0 \leq k < 1$ avec :*

$$\forall x, y \in E, \quad d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq kd\left(x, y\right),$$

alors l'application T admet un unique point fixe $x^* \in E$. En outre, pour tout $x \in E$, la suite des itérées $\left(T^n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*.

1. On note E l'ensemble des fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On muni E de la norme uniforme $\|.\|_\infty$ définie par :
$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} \left\{|f\left(x\right)|\right\}.$$
On rappelle que $(E, \|.\|_\infty)$ est un espace métrique complet. Pour $f \in E$, on note
$$Tf(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f(2x) & \text{si } x \in [0,1/2[\\ \frac{1}{2}(1+f(2x-1)) & \text{si } x \in [1/2,1] \end{cases}.$$
Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in E$ telle que $Tf = f$, puis identifier cette fonction.
Indication : il s'agit d'une fonction affine.
2. Dans toute la suite, on considère $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X_k}{2^{k+1}}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X_{n-k}}{2^{k+1}}$ et
$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X_k}{2^{k+1}}.$$
Vérifier que S est bien définie en montrant qu'elle définit toujours une série convergente et remarquer que $0 \leq S \leq 1$. Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers S.
3. On pose, pour $x \in [0,1]$, $F_n(x) = \mathbb{P}(T_n \leq x)$.
   (a) Montrer que $F_{n+1}\left(x\right) = \mathbb{P}\left(T_n \leq 2x - X_{n+1}\right)$.
   (b) À l'aide d'une formule des probabilités totales pour le système complet $\{X_{n+1} = 0\}$ et $\{X_{n+1} = 1\}$, montrer que :
   $$F_{n+1}\left(x\right) = \frac{1}{2}\left[\mathbb{P}\left(T_n \leq 2x - 1\right) + \mathbb{P}\left(T_n \leq 2x\right)\right].$$
   Attention à bien justifier les arguments d'indépendance !
   (c) En distinguant les valeurs des probabilités qui apparaissent dans le membre de droite selon les valeurs de $x \in [0,1]$, montrer que :
   $$\forall x \in [0,1] \quad F_{n+1}\left(x\right) = TF_n(x).$$
4. Déduire de ce qui précède que la suite de fonction $(F_n)_{n\geq 1}$ converge sur $\mathbb{R}$ et identifier sa limite $F : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$.
5. Justifier qu'à $n \geq 1$ fixé, les vecteurs aléatoires $(X_0, \ldots, X_n)$ et $(X_n, \ldots, X_0)$ ont même loi puis que T_n et S_n ont même loi.
6. En déduire que S suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

FIN

1 Solutions

Solution 1 Pour tout $r > 0$, on a $\mathbb{P}(R > r) = 1 - \mathbb{P}(R \geq r) = 1 - (\mathbb{P}(R < r) + \mathbb{P}(R = r))$. $\mathbb{P}(R = r) = \mathbb{P}((X, Y) \in \mathcal{C}_r)$, où $\mathcal{C}_r$ est le cercle centré en l'origine et de rayon r. Mais un cercle est de mesure de Lebesgue nulle, donc $\mathbb{P}(R = r) = 0$. Ainsi $\mathbb{P}(R > r) = 1 - \mathbb{P}(R < r)$, donc $(\mathbb{P}(R > r) = \mathbb{P}(R < r)) \iff \mathbb{P}(R < r) = \frac{1}{2}$. $\mathbb{P}(R < r) = \mathbb{P}((X, Y) \in D_r)$ où D_r est le disque ouvert centré en l'origine et de rayon R. Comme (X, Y) suit la loi uniforme sur D, on a pour tout $r \in [0, 1[$

$$\mathbb{P}((X, Y) \in D_r) = \frac{\lambda(D_r \cap D)}{\lambda(D)} = \frac{\lambda(D_r)}{\lambda(D)} = \frac{\pi r^2}{\pi 1^2} = r^2.$$

Ainsi, on voit aisément qu'il suffit de prendre $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour avoir l'identité demandée.

Solution 2 Posons $Y_n = X_n^3$. Comme les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes, les $(Y_n)_{n\geq 1}$ le sont aussi. Elles suivent toutes la même loi, à savoir la loi image de la loi uniforme sur $[0; 2]$ par l'application $x \mapsto x^3$. On a $|Y_n| \leq 2$, donc les $(Y_n)_{n\geq 1}$ admettent des moments de tous ordres.

D'après le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}Y_1 = \mathbb{E}X_1^3 = \int_{[0;2]} \frac{1}{2} x^3 \, dx = \frac{2^4}{2.4} = 2.$$

Les $(Y_n)_{n\geq 1}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 1 : d'après la loi forte des grands nombres, S_n/n converge donc vers $\mathbb{E}Y_1 = 2$.

Par ailleurs, les $(Y_n)_{n\geq 1}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2 : d'après la loi forte des grands nombres, $(S_n - n\mathbb{E}Y_1)/\sqrt{n} = (S_n - 2n)/\sqrt{n}$ converge donc vers $\mathcal{N}(0, \mathrm{Var}\ Y_1)$. Il n'y a plus qu'à calculer sa valeur exacte : $\mathrm{Var}\ Y_1 = \mathbb{E}Y_1^2 - (\mathbb{E}Y_1)^2 = \mathbb{E}X_1^6 - 4$.

D'après le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}X_1^6 = \int_{[0;2]} \frac{1}{2} x^6 \, dx = \frac{2^7}{2.7} = \frac{2^6}{7}.$$

Finalement

$$\mathrm{Var}\ Y_1 = \frac{2^6}{7} - 4 = 4(\frac{2^4}{7} - 1) = \frac{4(16-7)}{7} = \frac{36}{7}.$$

Solution 3 1. Il est bien connu que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. Soient $f, g \in E$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$Tf(x) - Tg(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f(2x) - g(2x)) & \text{si } x \in [0, 1/2[\\ \frac{1}{2}(f(2x-1) - g(2x-1)) & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

Dans les deux cas ; $|Tf(x) - Tg(x)| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$. En passant au suprémum, on obtient $\|Tf - Tg\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$. Il est facile de voir que pour tout $f \in E$, $Tf \in E$, avec $\|Tf\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f\|_\infty$, soit $Tf \in E$. Ainsi $f \mapsto Tf$ est une application 1/2 contractante de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même. Elle admet donc un unique point fixe. Il est facile de voir que l'application $f(x) = x$ est un point fixe : c'est le point fixe cherché.

2. Grâce à la majoration $\frac{|X_k(\omega)|}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^{k+1}}$, on voit que la série de terme général $\frac{X_k(\omega)}{2^{k+1}}$ converge absolument, ce qui montre que $S(\omega)$ est bien définie pour tout ω. S_n converge presque sûrement vers S et la convergence presque sûre implique la convergence en loi, donc S_n converge en loi vers S.
3. (a) On a $T_{n+1} = \frac{X_{n+1}+T_n}{2}$, d'où
$$F_{n+1}(x) = \mathbb{P}(\frac{X_{n+1}+T_n}{2} \leq x) = \mathbb{P}(T_n \leq 2x - X_{n+1}).$$
   (b) Ainsi,
$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \mathbb{P}(T_n \leq 2x - X_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(T_n \leq 2x - X_{n+1}, X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(T_n \leq 2x - X_{n+1}, X_{n+1} = 1) \\ &= \mathbb{P}(T_n \leq 2x, X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(T_n \leq 2x - 1, X_{n+1} = 1) \end{aligned}$$
   Les $(X_i)_{i\geq 0}$ sont indépendantes. Par associativité de l'indépendance, les tribus $\sigma(X_0,\dots,X_n)$ et $\sigma(X_{n+1})$ sont indépendantes. Comme la variable aléatoire T_n est $\sigma(X_0,\dots,X_n)$ mesurable, la variable T_n est alors indépendante de X_{n+1} et on a
$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \mathbb{P}(T_n \leq 2x)\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(T_n \leq 2x - 1)\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{P}(T_n \leq 2x) + \mathbb{P}(T_n \leq 2x - 1)) \end{aligned}$$
   (c) On a
$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(F_n(2x) + F_n(2x-1)).$$
   — Si $x \in [0, 1/2[$, $2x - 1 \leq 0$,
     donc $F_n(2x-1) = 0$ et $F_{n+1}(x) = \frac{1}{2}F_n(2x)$.
   — Si $x \in [1/2, 1]$, $2x \geq 1$,
     donc $F_n(2x) = 1$ et $F_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(1 + F_n(2x-1))$.

   Dans les deux cas, $F_{n+1}(x) = (TF_n)(x)$.
4. D'après le théorème du point fixe, les itérées par T de F_0 convergent pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, vers le point fixe de T : l'identité. Comme $F_n(x) = (T^n F_0)(x)$, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |F_n(x) - x| = 0.$$
   En particulier pour tout $x \in [0,1]$, $\mathbb{P}(T_n \leq x) = F_n(x) \to x$. Pour tout $x < 0$ $\mathbb{P}(T_n \leq x) = 0 \to 0$. Pour tout $x > 1$ $\mathbb{P}(T_n \leq x) = 1 \to 1$.
5. La loi de (S_n) (resp. T_n) est la loi image de $\mathbb{P}_{(X_0,\dots,X_{n+1})}(resp. \mathbb{P}_{(X_{n+1},\dots,X_0)})$ par l'application
$$(x_0,\dots,x_n) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{2^{k+1}}.$$
   Comme $\mathbb{P}_{(X_0,\dots,X_{n+1})} = \mathrm{Ber}(1/2)^{\otimes(n+1)} = \mathbb{P}_{(X_{n+1},\dots,X_0)}$, on en déduit que (S_n) et T_n ont même loi.
6. La question 4. montre que si F est la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) \to F(x)$, ce qui montre que T_n converge en loi vers la loi uniforme sur $[0,1]$. Comme T_n et S_n ont même loi, S_n converge également en loi vers la loi uniforme sur $[0,1]$. Mais S_n converge en loi vers S, donc par unicité de la limite S suit la loi uniforme sur $[0,1]$.