SUJET D'EXAMEN PARTIEL

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 2H 00
UE : Probabilités et Statistiques	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 6	
Epreuve de :	■ 2 pages autorisées
Session ......1........	☐ Documents non autorisés
Date : 1er avril 2019	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 10H00–12H00	■ Calculatrice non autorisée

Barème approximatif : exercice 1, 6 points – exercice 2, 19 points.

Exercice 1 Pour tout $r > 0$, on pose $\Gamma(r) = \int_0^\infty e^{-t}t^{r-1}\,dt$. On rappelle que la loi $\Gamma(r, \lambda)$ est la probabilité de densité

$$\gamma_{r,\lambda}(t) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} e^{-\lambda t} t^{r-1}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t).$$

1. Calculer la transformée de Laplace de $\Gamma(r, \lambda)$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que si X et Y sont des variables indépendantes de loi respectives $\Gamma(r, \lambda)$ et $\Gamma(s, \lambda)$ alors $X + Y$ suit une loi $\Gamma(r + s, \lambda)$.
3. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ. Calculer la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.
4. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que X_1^2 suit une loi Γ et en déduire la loi de $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ (appelée loi du χ^2).

Exercice 2 Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. On note μ_n la loi image de $U[0,1]^{\otimes n}$ par l'application

$$\phi : x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \max(x_1, \ldots, x_n).$$

Montrer que μ_n admet la densité

$$t \mapsto f_n(t) = nt^{n-1}\mathbb{1}_{[0,1]}(t)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

2. Soit V une variable aléatoire suivant la loi μ_n.
   (a) Calculer $\mathbb{E}\left(V + \frac{1}{V}\right)$.
   (b) Montrer que la loi de V^n est une loi à densité. La reconnaître.

3. On suppose maintenant $n \geq 2$. Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
Pour i entier entre 1 et n, on pose $Y_i^* = \max(X_j, j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\})$ et $M = \max(X_1, \ldots, X_n)$. On note enfin $N = \inf\{i \geq 1; X_i = M\}$.
Soit i un entier entre 1 et n.
   (a) Montrer soigneusement que Y_i^* suit la loi μ_{n-1}. Quelle est la loi du vecteur (X_i, Y_i^*) ?
   (b) On pose

$$\tilde{\Omega} = \bigcap_{1 \leq i < j \leq n} \{X_i \neq X_j\}.$$

   Montrer que $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 1$.
   (c) Soit t un réel. On remarque (on ne demande pas de le démontrer) que

$$\{N = i, M \leq t\} \cap \tilde{\Omega} = \{Y_i^* \leq X_i \leq t\} \cap \tilde{\Omega}.$$

   En déduire que pour tout i entre 1 et n,

$$\mathbb{P}(N = i, M \leq t) = \mathbb{P}(Y_i^* \leq X_i \leq t).$$

   (d) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\mathbb{P}(Y_i^* < X_i \leq t) = \int_{[0,t]} \mathbb{P}(Y_i^* < u) \, d\lambda(u).$$

   (e) Montrer enfin que $\mathbb{P}(N = i, M \leq t) = \mathbb{P}(N = i)\mathbb{P}(M \leq t)$.

   Note : On pourrait en déduire que $\mathbb{P}_{(N,M)} = U(\{1, \ldots, n\}) \otimes \mu_n$; la preuve n'est pas demandée.

FIN

1 Solutions

Solution 1 1. Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathcal{L}_{\Gamma(r,\lambda)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx}\gamma_{r,\lambda}(x)\,dx = \frac{\lambda^r}{(\lambda+t)^r}\int_0^{+\infty}\gamma_{r+t,\lambda}(x)\,dx = \frac{\lambda^r}{(\lambda+t)^r}.$$

2. Comme X et Y sont indépendantes, on a l'égalité

$$\mathcal{L}_{X+Y}(t) = \mathcal{L}_X(t)\mathcal{L}_Y(t) = \frac{\lambda^{r+s}}{(\lambda+t)^{r+s}} = \mathcal{L}_{\Gamma(r+s,\lambda)}(t),$$

ce qui permet de conclure puisque la transformée de Laplace sur $\mathbb{R}_+$ caractérise la loi des variables aléatoires positives.

3. Avec la question précédente, une récurrence immédiate donne que $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\Gamma(n, \lambda)$.

4. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X^2}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-tx^2}\,d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2(1+2t)}{2}}\,d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+2t}} = \mathcal{L}_{1/2,1/2}(t),\end{aligned}$$

donc la loi de X_1^2 est $\Gamma(1/2, 1/2)$. Avec la question précédente, on conclut que la loi de $X_1^2 + \cdots + X_n^2$ est donc la loi $\Gamma(n/2, 1)$.

Solution 2 1. On va calculer la fonction de répartition de μ_n : on a pour tout t réel

$$\begin{aligned}F_{\mu_n}(t) &= U^{\otimes n}(\phi^{-1}(]-\infty, t]))\\ &= U^{\otimes n}(]-\infty, t]^n)\\ &= U(]-\infty, t])^n\\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\\ t^n & \text{si } t \in [0,1]\\ 1 & \text{si } t \geq 1\end{cases}\end{aligned}$$

On observe que F_{μ_n} est continue et C^1 par morceaux : on en déduit que μ_n est une loi à densité, densité donnée sur chaque intervalle par la dérivée de F_{μ_n}, ce qui donne le résultat voulu.

2. (a) V prend presque sûrement des valeurs strictement positives, donc la variable $V + \frac{1}{V}$ est donc bien définie presque sûrement et positive, ce qui fait que $\mathbb{E}(V + \frac{1}{V})$ a bien du sens (éventuellement infini). D'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(V + \frac{1}{V}) &= \int_{\mathbb{R}_+} v + \frac{1}{v}\,d\mathbb{P}_V(v) = \int_{\mathbb{R}_+} v + \frac{1}{v}\,d\mu_n(v)\\ &= \int_{\mathbb{R}_+} (v + \frac{1}{v}) f_n(v)\,d\lambda(v) = \int_{[0,1]} n(v^{n-2} + v^n)\,d\lambda(v)\\ &= n(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}) = \frac{2n^2}{n^2-1}.\end{aligned}$$

(b) Comme V prend ses valeurs dans $[0,1]$, V^n aussi. Pour t entre 0 et 1, on a $\mathbb{P}(V^n \le t) = \mathbb{P}(V \le t^{1/n}) = F_{\mu_n}(t^{1/n}) = t$. V^n a la fonction de répartition de $U[0,1]$ donc V^n suit la loi uniforme sur $[0,1]$, car la fonction de répartition caractérise la loi. C'est bien une loi à densité.

3. (a) On a $Y_i^* = \phi((X_j)_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}})$, donc la loi de Y_i^* est la loi image de $\mathbb{P}_{(X_j)_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}}}$ par ϕ. Or $\mathbb{P}_{(X_j)_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}}} = U([0,1])^{\otimes(n-1)}$, d'où la loi de Y_i^* avec le résultat de la première question. Comme Y_i^* est $\sigma((X_j)_{j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i\}})$-mesurable et que cette tribu est indé–pendante de X_i (théorème d'associativité de l'indépendance, ou lemme des coalitions), Y_i^* est indépendante de X_i, donc $\mathbb{P}_{(X_i,Y_i^*)} = \mathbb{P}_{X_i} \otimes \mathbb{P}_{Y_i^*} = U([0,1]) \otimes \mu_{n-1}$.

(b) Pour i,j distincts entre 1 et n, les variables aléatoires X_i et $-X_j$ sont des variables aléatoires indépendantes, suivant chacune une loi à densité, puisque ce sont des lois uniformes respectivement sur $[0,1]$ et $[-1,0]$. L'indépendance entraîne que la somme est encore à densité, et ne charge donc pas le singleton $\{0\}$: $\mathbb{P}(X_i - X_j = 0) = 1$ et donc $\mathbb{P}(X_i \neq X_j)$. Ainsi, $\tilde{\Omega}$ est de probabilité 1 puisque c'est l'intersection d'un nombre fini d'événements de probabilité 1.

(c) Si A est un événement quelconque, le principe de partition donne $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A,\tilde{\Omega}) + \mathbb{P}(A,\tilde{\Omega}^c)$. Or $0 \le \mathbb{P}(A,\tilde{\Omega}^c) \le \mathbb{P}(\tilde{\Omega}^c) = 0$, donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A,\tilde{\Omega})$. On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N=i, M\le t) &= \mathbb{P}(N=i, M\le t, \tilde{\Omega}) = \mathbb{P}(Y_i^* \le X_i \le t, \tilde{\Omega})\\ &= \mathbb{P}(Y_i^* \le X_i \le t)\end{aligned}$$

4. On pose $A_t = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; y \le x \le t\}$. Il vient

$$\mathbb{P}(Y_i^* \le X_i \le t) = \mathbb{P}((X_i,Y_i^*)\in A_t) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{(X_i,Y_i^*)\in A_t\}})$$

$$= \mathbb{E}\mathbb{1}_{A_t}(X_i,Y_i^*) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{A_t}(x,y)\ d\mathbb{P}_{(X_i,Y_i^*)}(x,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{A_t}(x,y)\ d\mathbb{P}_{X_i}\otimes\mathbb{P}_{Y_i^*}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_t}(x,y)\ d\mathbb{P}_{Y_i^*}(y)\right)\ d\mathbb{P}_{X_i}(y)$$

$$= \int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{y\le x}\mathbb{1}_{x\le t}\ d\mathbb{P}_{Y_i^*}(y)\right)\ d\lambda(x) = \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{x\le t}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{y\le x}\ d\mathbb{P}_{Y_i^*}(y)\right)\ d\lambda(x)$$

$$= \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{x\le t}\mathbb{P}_{Y_i^*}(]-\infty,x])\ d\lambda(x)$$

$$= \int_{[0,1]} \mathbb{1}_{x\le t}\mathbb{P}(Y_i^*\le x)\ d\lambda(x) = \int_{[0,t]} \mathbb{P}(Y_i^*\le x)\ d\lambda(x)$$

5. Comme Y_i^* suit la loi μ_{n-1}, on a pour tout x de $[0,1]$, $\mathbb{P}(Y_i^* \le x) = x^{n-1}$, d'où $\mathbb{P}(N=i, M\le t) = \mathbb{P}(Y_i^* < X_i \le t) = \int_{[0,t]} x^{n-1}\ d\lambda(x) = \frac{t^n}{n}$. En particulier $\mathbb{P}(N=i) = \mathbb{P}(N=i, M\le 1) = \frac{1}{n}$ et avec le principe de partition,

$$\mathbb{P}(M\le t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(N=i, M\le t) = \sum_{i=1}^n \frac{t^n}{n} = t^n,$$

ce qui donne l'égalité voulue.