SUJET D'EXAMEN PARTIEL

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 3H 00
UE : Probabilités et Statistiques	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 6	
Epreuve de :	■ 4 pages autorisées
Session ......1........	□ Documents non autorisés
Date : 27 mai 2019	□ Calculatrices autorisées
Horaire : 09H00–12H00	■ Calculatrice non autorisée

Exercice 1 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose $S = X^2 + Y^2$.
Calculer $\mathbb{P}(S \le \frac{1}{4})$.
Indication : on pourra écrire $\{S \le \frac{1}{4}\} = \{(X, Y) \in D\}$, pour D bien choisi.

Exercice 2 Soit $\Theta = \mathbb{N}^* \times]0, 1[$. On note $\theta = (N, p)$ les éléments de Θ et on suppose que pour tout $\theta \in \Theta$, $\mathbb{P}_\theta = \mathbb{P}_{(N,p)}$ est une mesure de probabilité telle que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n, \dots$ sont, sous $\mathbb{P}_\theta$, des variables indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p)$. La famille $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ forme donc un modèle statistique.

1. Montrer que $\overline{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ est un estimateur fortement consistant de Np.
2. Montrer que $\overline{V}_n = \frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n} - (\overline{X}_n)^2$ est un estimateur fortement consistant de $Np(1-p)$.
3. Montrer que pour tout $\theta = (N, p) \in \Theta$, on a sous $\mathbb{P}_\theta$ la convergence en loi :
$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - nNp}{\sqrt{nNp(1-p)}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$
4. Montrer que pour tout $\theta = (N, p) \in \Theta$, on a sous $\mathbb{P}_\theta$ la convergence en loi :
$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - nNp}{\sqrt{n\overline{V}_n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$
5. Donner, pour n assez grand, un intervalle de confiance centré pour Np au risque 5%.

Exercice 3 La fonction génératrice des moments M_X d'une variable aléatoire réelle bornée est définie sur $\mathbb{R}$ par $M_X(a) = \mathbb{E}(e^{aX})$.

1. Question préliminaire.
   (a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. Montrer que la fonction génératrice des moments M_X vérifie l'inégalité
   $$\forall a \geq 0 \quad M_X(a) \leq 1 + e^a p \leq \exp(e^a p).$$
   (b) Soit n un entier naturel non nul, $p \in [0,1]$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Montrer que la fonction génératrice des moments M_X vérifie l'inégalité
   $$\forall a \geq 0 \quad M_X(a) \leq \exp(ne^a p).$$
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes avec pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}(\lfloor n^{1/3} \rfloor, \frac{1}{\sqrt{n}})$.
   (a) Montrer que pour tout $K > 0$, pour tout $\alpha > 0$, pour tout $n \geq 1$, on a
   $$\mathbb{P}(X_n \geq K) \leq e^{-\alpha K} M_{X_n}(\alpha).$$
   (b) Montrer que pour tout $\alpha > 0$, pour tout $n \geq 1$, on a
   $$M_{X_n}(\alpha) \leq \exp(e^\alpha n^{-1/6}).$$
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$,
   $$\mathbb{P}(X_n > 6) = \mathbb{P}(X_n \geq 7) \leq \frac{e}{n^{7/6}}.$$
   (d) Montrer que
   $$\mathbb{P}(X_n > 6 \text{ i.s.}) = 0.$$
   (e) En déduire que $\mathbb{P}(\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} X_n \leq 6) = 1$.
   (f) Montrer l'équivalent en l'infini :
   $$\mathbb{P}(X_n = 6) \sim \frac{1}{720\, n}.$$
   (g) Montrer enfin que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} X_n = 6$ presque sûrement.

FIN

1 Solutions

Solution 1 Comme X et Y sont indépendantes, on a $\mathbb{P}_{X,Y} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y = \mathcal{U}([-1,1]) \otimes \mathcal{U}([-1,1]) = \mathcal{U}([-1,1]^2)$. On a $\{S \le \frac{1}{4}\} = \{(X,Y) \in D\}$, avec $D = B(0,1/2)$. On en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S \le \frac{1}{4}) &= \mathbb{P}((X,Y) \in D) = \mathbb{P}_{(X,Y)}(D) \\ &= \mathcal{U}([-1,1]^2)(D) = \frac{\lambda^2(D \cap [-1,1]^2)}{\lambda^2([-1,1]^2)} \\ &= \frac{\lambda^2(D)}{\lambda^2([-1,1]^2)} = \frac{\pi(1/2)^2}{4} \\ &= \frac{\pi}{16}.\end{aligned}$$

Solution 2

1. Il faut montrer que pour tout $\theta \in \Theta$, $\overline{X}_n$ converge $\mathbb{P}_\theta$ presque sûrement vers Np. Soit donc $\theta \in \Theta$. Sous $\mathbb{P}_\theta$, les variables aléatoires (X_n) sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées intégrables de loi commune $\mathcal{B}(N,p)$. D'après la loi forte des grands nombres, $\overline{X}_n$ converge $\mathbb{P}_\theta$ presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1) = Np$ (l'espérance d'une variable binomiale est connue). Ceci donne le résultat voulu.
2. Soit $\theta \in \Theta$. Sous $\mathbb{P}_\theta$, les variables aléatoires (X_n^2) sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi commune la loi image de $\mathcal{B}(N,p)$ par $x \mapsto x^2$. Cette loi est bien intégrable, puisque son support est fini. On en déduit avec la loi forte des grands nombres que $\frac{X_1^2+\dots X_n^2}{n}$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1^2)$. Comme $\overline{X}_n$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)$, $(\overline{X}_n)^2$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1)^2$; par différence $\overline{X}_n$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = \text{Var }(X_1) = Np(1-p)$. Ceci donne le résultat voulu.
3. Les (X_n) sont indépendantes identiquement distribuées, avec une un moment d'ordre deux. Leur variance commune est Var $(X_1) = Np(1-p)$. On peut donc appliquer le théorème central limite, qui donne la convergence en loi de Z_n vers $\mathcal{N}(0,1)$.
4. On a $\frac{X_1+\dots+X_n-nNp}{\sqrt{n\overline{V}_n}} = A_n Z_n,$ avec

   $$A_n = \sqrt{\frac{Np(1-p)}{\overline{V}_n}}.$$

   La question 2. entraîne la convergence presque sûre, donc en probabilité de A_n vers 1. Comme on a vu que Z_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$, le lemme de Slutski entraîne alors la convergence en loi de $A_n Z_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.
5. Comme $Z'_n = A_n Z_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ et que la loi $\mathcal{N}(0,1)$ n'a pas d'atomes On a

   $$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Z'_n \in [-1.96, 1.96]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1.96}^{1.96} e^{-t^2/2}\, dt > 0.95$$

On en déduit que pour n assez grand, $\mathbb{P}(Z'_n \in [-1.96, 1.96]) > 0.95$.
Or

$$\left\{Z'_n \in [-1.96, 1.96]\right\} = \left\{Np \in [\overline{X}_n - 1.96\sqrt{\frac{\overline{V}_n}{n}}, \overline{X}_n + 1.96\sqrt{\frac{\overline{V}_n}{n}}]\right\},$$

donc pour n assez grand,

$$\left[\overline{X}_n - 1.96\sqrt{\frac{\overline{V}_n}{n}}, \overline{X}_n + 1.96\sqrt{\frac{\overline{V}_n}{n}}\right]$$

est un intervalle de confiance pour Np à un taux de confiance de 95%.

Solution 3 1. (a) Soit $a \geq 0$. Avec le théorème de transfert pour les variables discrètes, on a

$$\begin{aligned} M_X(a) &= \mathbb{P}(X = 0)e^{a.0} + \mathbb{P}(X = 1)e^{a.1} = (1 - p) + pe^a \leq 1 + pe^a \\ &\leq \exp(pe^a) \end{aligned}$$

Car $1 + x \leq e^x$ pour tout $x \geq 0$.

(b) Soit $a \geq 0$. Avec le théorème de transfert pour les variables discrètes, on a

$$\begin{aligned} M_X(a) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)e^{ak} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} e^{ak} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k e^{ak} = (1 + pe^a)^n \\ &\leq (\exp(pe^a))^n = \exp(npe^a). \end{aligned}$$

2. (a) Comme $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$ est croissante et $\{X_n \geq K\} \subset \{e^{\alpha X_n} \geq e^{\alpha K}\}$.
Donc $\mathbb{P}(X_n \geq K) \leq \mathbb{P}(e^{\alpha X_n} \geq e^{\alpha K})$ et avec l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X_n \geq K) = \mathbb{P}(e^{\alpha X_n} \geq e^{\alpha K}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{\alpha X_n})}{e^{\alpha K}} = e^{-\alpha K} M_{X_n}(\alpha).$$

(b) La question 1.b donne immédiatement $M_{X_n}(\alpha) \leq \exp(\lfloor n^{1/3} \rfloor e^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{n}})$. Comme $\lfloor n^{1/3} \rfloor \leq n^{1/3}$, la croissance de la fonction exponentielle donne l'inégalité voulue.

(c) L'égalité $\mathbb{P}(X_n > 6) = \mathbb{P}(X_n \geq 7)$ découle du fait que X_n ne prend que des valeurs entières. En utilisant a) et b) avec $K = 7$, on a pour tout $\alpha > 0$.

$$\mathbb{P}(X_n \geq 7) \leq e^{-7\alpha} \exp(e^{\alpha} n^{-1/6}) = \exp(-7\alpha + e^{\alpha} n^{-1/6}).$$

En prenant $\alpha = (\log n)/6$, on obtient

$$\mathbb{P}(X_n \geq 7) \leq \exp(-\frac{7}{6}\log n + 1) = \frac{e}{n^{7/6}}.$$

(d) La majoration de la question précédente assure la convergence de la série de terme général $\mathbb{P}(X_n \geq 7)$. Le (premier) lemme de Borel–Cantelli donne alors le résultat voulu.

(e) On a l'inclusion $\{\overline{\lim} X_n > 6\} \subset \{X_n > 6 \text{ i.s.}\}$.
Donc $0 \leq \mathbb{P}(\overline{\lim} X_n > 6) \leq \mathbb{P}(X_n > 6 \text{ i.s.}) = 0$.
On a donc $\mathbb{P}(\overline{\lim} X_n > 6) = 0$ et en passant au complémentaire $\mathbb{P}(\overline{\lim} X_n \leq 6) = 1$.

(f) On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = 6) &= \binom{\lfloor n^{1/3} \rfloor}{6} (\frac{1}{\sqrt{n}})^6 (1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^{\lfloor n^{1/3} \rfloor - 6} \\ &= \binom{\lfloor n^{1/3} \rfloor}{6} (\frac{1}{\sqrt{n}})^6 (1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^{\lfloor n^{1/3} \rfloor} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^{-6} \\ &\sim \binom{\lfloor n^{1/3} \rfloor}{6} \frac{1}{n^3} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^n\end{aligned}$$

On a

$$\binom{\lfloor n^{1/3} \rfloor}{6} = \frac{\lfloor n^{1/3} \rfloor (\lfloor n^{1/3} \rfloor - 1)(\lfloor n^{1/3} \rfloor - 2)(\lfloor n^{1/3} \rfloor - 3)(\lfloor n^{1/3} \rfloor - 4)(\lfloor n^{1/3} \rfloor - 5)}{6!}$$

Chaque terme du numérateur est équivalent à $n^{1/3}$: on en déduit que

$$\binom{\lfloor n^{1/3} \rfloor}{6} \sim \frac{n^2}{6!} = \frac{n^2}{720}$$

On a $(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^{\lfloor n^{1/3} \rfloor} = \exp(\lfloor n^{1/3} \rfloor \log(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}))$.
Comme $\log(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) \sim -\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\lfloor n^{1/3} \rfloor \sim n^{1/3}$, on a

$$\lfloor n^{1/3} \rfloor \log(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) \sim -\frac{1}{n^{1/6}}$$

qui a une limite nulle quand n tend vers l'infini. Par continuité de la fonction exponentielle $(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^{\lfloor n^{1/3} \rfloor}$ tend donc vers 1 quand n tend vers l'infini, et est donc équivalent à 1. En multipliant les équivalents, on a donc bien

$$\mathbb{P}(X_n = 6) \sim \frac{1}{720\, n}.$$

(g) Comme les variables (X_n) sont indépendantes ; les événements $\{X_n = 6\}$ le sont aussi : le 2ème lemme de Borel–Cantelli s'applique et on a $\mathbb{P}(X_n = 6 \quad \text{i.s.}) = 1$.
Comme $\{X_n = 6 \quad \text{i.s.}\} \subset \{\overline{\lim} X_n \geq 6\}$, par comparaison on a également $\mathbb{P}(\overline{\lim} X_n \geq 6) = 1$. L'événement $\{\overline{\lim} X_n = 6\}$ est l'intersection des événements $\{\overline{\lim} X_n \geq 6\}$ et $\{\overline{\lim} X_n \leq 6\}$, qui sont tous deux de probabilité un : il est donc de probabilité 1.