

Exercice 1 (Exercice de cours) 3 points Soit $\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire alternée définie par la formule $\omega((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$ et soit $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définies par $f_1(x, y) = (2y, 3x)$, $f_2(x, y) = (x + 2y, y)$ et $f_3(x, y) = (2x + y, 4x + 2y)$. Calculer $f_1^*\omega$, $f_2^*\omega$ et $f_3^*\omega$. En déduire la valeur de $\det(f_1)$, $\det(f_2)$, $\det(f_3)$.

Solution : Par définition, on a

$$\begin{aligned} f_1^*\omega((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \omega(f_1(x_1, y_1), f_1(x_2, y_2)) = \omega((2y_1, 3x_1), (2y_2, 3x_2)) \\ &= (2y_1)(3x_2) - (3x_1)(2y_2) = -6(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= -6\omega((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

On en déduit, par définition de \det , que $\det(f_1) = -6$. De manière similaire,

$$\begin{aligned} f_2^*\omega((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \omega(f_2(x_1, y_1), f_2(x_2, y_2)) = \omega((x_1 + 2y_1, y_1), (x_2 + 2y_2, y_2)) \\ &= (x_1 + 2y_1)(y_2) - (y_1)(x_2 + 2y_2) = x_1y_2 - x_2y_1 \\ &= \omega((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

On en déduit que $\det(f_2) = 1$. Le calcul pour f_3 est similaire ; on trouve $\det(f_3) = 0$.

Exercice 2 4 points Soit A une matrice de taille $n \times n$ à coefficients réels et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Donner la valeur de $\det({}^tA)$ en fonction de $\det(A)$. **1 point**
2. Donner la valeur de $\det(\lambda A)$. **1 point**
3. On suppose que n est impair et que A est antisymétrique, c'est-à-dire telle que ${}^tA = -A$. Montrer que $\det(A) = 0$. **2 points**

Solution :

1. $\det({}^tA) = \det(A)$.
2. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
3. Si ${}^tA = -A$, alors $\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$. Si de plus n est impair, alors $(-1)^n = -1$, donc $\det(A) = -\det(A)$, donc $\det(A) = 0$.

Exercice 3 6 points Soit A une matrice de taille $n \times n$ à coefficients réels.

1. Rappeler la définition de la comatrice \tilde{A} . **1 point**
2. Rappeler la relation entre \tilde{A} et A . **1 point**
3. Montrer que A est inversible si et seulement si \tilde{A} est inversible. **1,5 points**
4. Montrer que si A est inversible alors $\det(\tilde{A}) = \det(A)^{n-1}$. **1,5 points**
5. Montrer que si A n'est pas inversible, alors $\det(\tilde{A}) = \det(A)^{n-1}$. **1 point**

On a donc $\det(\tilde{A}) = \det(A)^{n-1}$ dans tous les cas.

Solution :

1. Soit $A(i, j)$ la matrice extraite de A obtenue en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne. La comatrice est la matrice dont le coefficient (i, j) est $(-1)^{i+j} \det(A(i, j))$.
2. On a vu dans le cours que $A {}^t\tilde{A} = \det(A)I_n$.

3. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si $\det(A) = 0$, l'égalité précédente donne $A^t \tilde{A} = 0$, donc ${}^t \tilde{A}$ ne peut pas être inversible. Si $\det(A) \neq 0$, alors $(\frac{1}{\det(A)} A)^t \tilde{A} = I_n$, ce qui montre que ${}^t \tilde{A}$ est inversible d'inverse $\frac{1}{\det(A)} A$. On conclut en utilisant le fait que \tilde{A} est inversible si et seulement si ${}^t \tilde{A}$ est inversible.
4. Si A est inversible, alors la relation de la question 2 donne $\det(A^t \tilde{A}) = \det(\det(A) I_n) = \det(A)^n$. Comme $\det(A^t \tilde{A}) = \det(A) \det({}^t \tilde{A}) = \det(A) \det(\tilde{A})$, on en déduit que $\det(A)^n = \det(A) \det(\tilde{A})$, ce qui donne, puisque $\det(A) \neq 0$, $\det(\tilde{A}) = \det(A)^{n-1}$.
5. Si A n'est pas inversible, on a vu que \tilde{A} n'est pas inversible, et donc $\det(A) = \det(\tilde{A}) = 0$. La relation $\det(\tilde{A}) = \det(A)^{n-1}$ est donc vérifiée dans ce cas aussi.

Exercice 4 14 points Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On va calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par deux méthodes différentes.

1. Calculer A^2, A^3, A^4 . **2 points**

Première méthode.

2. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer par récurrence J^n pour tout n . **2 points**
3. Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Etablir une relation entre A, I et J . **1 point**
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. **3 points** Au cours du calcul, on pourra utiliser la formule du binôme

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k (-1)^{n-k} b^{n-k}$$

avec $a = 6$ et $b = 1$. On aura soin de vérifier que la formule obtenue est compatible avec les résultats de la première question.

Deuxième méthode.

5. Trouver une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1} . **3 points**
6. Calculer $(PDP^{-1})^2$ puis $(PDP^{-1})^n$ en fonction de P et D . **1 point**
7. Retrouver la valeur de A^n . **2 points**

Solution :

1ère méthode.

$$\begin{aligned} A^n &= (2J - I)^n = (-I)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (2J)^k (-I)^{n-k} = (-1)^n I + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{k-1} (-1)^{n-k} \right) J \\ &= (-1)^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 6^k (-1)^{n-k} \right) J = (-1)^n I + \frac{1}{3} ((6-1)^n - (-1)^n) J \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$.

2ème méthode. Puisque $\text{rg}(A+I) = 1$, $\dim(\text{Ker}(A+I)) = 2$ et -1 est valeur propre de A d'ordre au moins 2. La troisième valeur propre λ est fournie par la trace : $\lambda - 1 - 1 = 3$ et donc $\lambda = 5$. Par suite, $\chi_A = -(X+1)^2(X-5)$.

De plus, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow x + y + z = 0$ et donc $E_{-1} = \text{Vect}(e_1, e_2)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De même, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_5 \Leftrightarrow x = y = z$ et $E_5 = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(-1, -1, 5)$ et on a $A = PDP^{-1}$.

Calcul de P^{-1} . Soit (i, j, k) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{cases} e_1 = i - j \\ e_2 = i - k \\ e_3 = i + j + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} j = i - e_1 \\ k = i - e_2 \\ e_3 = i + i - e_1 + i - e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) \\ j = \frac{1}{3}(-2e_1 + e_2 + e_3) \\ k = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + e_3) \end{cases}$$

et donc $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit alors $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n & 5^n \\ -(-1)^n & 0 & 5^n \\ 0 & -(-1)^n & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et on retrouve le résultat obtenu plus haut.

Exercice 5 7 points Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et $f, g : E \rightarrow E$ des applications linéaires. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que f et g sont diagonalisables. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(f) := \ker(f - \lambda \text{Id}_E)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ .

1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de f et μ_1, \dots, μ_s celles de g . Montrer qu'on a

$$E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(f) \quad \text{et} \quad E = \bigoplus_{j=1}^s E_{\mu_j}(g).$$

1 point

2. Soit $x \in E$ et $i \in \{1, \dots, r\}$. Montrer que si $f(x) = \lambda_i x$ alors $f(g(x)) = \lambda_i g(x)$. **1 point**

3. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g : pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on a l'inclusion $g(E_{\lambda_i}(f)) \subset E_{\lambda_i}(f)$. **1 point**

4. Soit, pour $1 \leq i \leq r$, un vecteur x_i de $E_{\lambda_i}(f)$. Soit $x = \sum_i x_i$ et soit $j \in \{1, \dots, s\}$. Montrer qu'on a $g(x) = \mu_j x$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $g(x_i) = \mu_j x_i$. **1 point**
5. En déduire que

$$E_{\mu_j}(g) = \bigoplus_i E_{\mu_j}(g) \cap E_{\lambda_i}(f).$$

1 point

6. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ de E constituée de vecteurs propres de f et de g (c'est-à-dire que pour tout k il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $f(e_k) = \lambda e_k$ et $g(e_k) = \mu e_k$). **2 points**

Le résultat montré dans la sixième question s'énonce en disant que f et g sont simultanément diagonalisables.

Solution :

1. Comme f est diagonalisable, E est la somme directe des sous-espaces propres de f . On a donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(f),$$

et similairement pour g .

2. Supposons que $f(x) = \lambda_i x$. Alors $f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(\lambda_i x) = \lambda_i g(x)$.
3. On a montré à la question précédente que si $x \in E_{\lambda_i}(f)$, alors $g(x) \in E_{\lambda_i}(f)$ puisque $f(g(x)) = \lambda_i g(x)$. Ceci montre que $g(E_{\lambda_i}(f)) \subset E_{\lambda_i}(f)$.
4. L'équation $g(x) = \mu_j x$ est équivalente à $\sum_i g(x_i) = \sum_i \mu_j x_i$. Posons $y_i = g(x_i)$. Par la question précédente, $y_i \in E_{\lambda_i}(f)$. On a alors $\sum_i y_i = \sum_i (\mu_j x_i)$ avec $y_i, \mu_j x_i \in E_{\lambda_i}(f)$, et les $E_{\lambda_i}(f)$ sont en somme directe. Cette équation est donc équivalente à ce que pour tout i , on ait $y_i = \mu_j x_i$, soit $g(x_i) = \mu_j x_i$, soit $x_i \in E_{\mu_j}(g)$.
5. Soit $x = \sum_i x_i$. On a montré à la question précédente que x est dans $E_{\mu_j}(g)$ si et seulement si chaque x_i est dans $E_{\mu_j}(g)$ (et donc dans $E_{\mu_j}(g) \cap E_{\lambda_i}(f)$, car $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$). Ceci revient à dire que $x = \sum_i x_i \in \bigoplus_i E_{\mu_j}(g) \cap E_{\lambda_i}(f)$. D'où l'égalité des sous-espaces vectoriels.
6. On a vu que

$$E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\mu_j}(g) \text{ et } E_{\mu_j}(g) = \bigoplus_i E_{\mu_j}(g) \cap E_{\lambda_i}(f)$$

(questions 1 et 5). On a donc

$$E = \bigoplus_{i,j} E_{\lambda_i}(f) \cap E_{\mu_j}(g). \quad (1)$$

Soit, pour chaque couple (i, j) , une base $\mathcal{B}_{i,j}$ de $E_{\lambda_i}(f) \cap E_{\mu_j}(g)$. Par (1), on obtient une base de E en prenant la réunion des bases de $E_{\lambda_i}(f) \cap E_{\mu_j}(g)$. Soit donc $\mathcal{B} = \cup_{i,j} \mathcal{B}_{i,j}$. Nous venons de voir qu'elle est une base de E . De plus, si $x \in \mathcal{B}$, il existe par définition un couple (i, j) tel que $x \in E_{\lambda_i}(f) \cap E_{\mu_j}(g)$. En posant $\lambda = \lambda_i$ et $\mu = \mu_j$, on a comme souhaité les relations $f(x) = \lambda x$ et $g(x) = \mu x$.