Algèbre linéaire 2
Seconde session, juin 2019

L2 mathématiques, épreuve d'algèbre linéaire 2
Le 19/06/2019 de 9h à 12h (durée 3h)

Sujet rédigé par P.E. Chaput et Lucas Fresse
documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1

Calculer le déterminant suivant en fonction des coefficients $a_1, \dots, a_n$:

$$D_n = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -a_n & a_n \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 2

Soient a, b, c trois nombres complexes. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a, b, c la matrice A est-elle diagonalisable?

2. On pose $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$. Montrer que A n'est pas diagonalisable dans ce cas, puis déterminer la décomposition de Dunford–Jordan de A.

Exercice 3

On considère la matrice réelle

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que 1 et -1 sont valeurs propres de A. Quelle est l'autre valeur propre? Justifier alors (sans calcul) que A est diagonalisable.

2. Trouver une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

3. Calculer A^n pour tout entier $n \geq 0$.

4. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de matrices colonnes, dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, vérifiant la relation de récurrence: $U_{n+1} = AU_n \quad \forall n \geq 0$. À quelle condition, portant sur le premier terme U_0, la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente? Quelle est alors sa limite?

Exercice 4

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On suppose qu'il existe un endomorphisme $\varphi : E \to E$ tel que $\varphi \circ \varphi = -\mathrm{id}_E$.

   (a) Déterminer un polynôme annulateur de φ.

(b) Montrer que φ n'admet pas de valeur propre.

(c) En déduire que n est pair.

2. Existe-t-il une matrice A de format $(5,5)$, à coefficients réels, telle que $A^2 = -I_5$?
   Si oui, donner un exemple d'une telle matrice. Si non, justifier.

EXERCICE 5

Dans cet exercice, on fixe un entier $n \geq 2$ et on considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n, à coefficients réels.

1. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Rappeler la définition de: " A et B sont semblables ".

   (b) Montrer que, si A et B sont semblables, alors A et B ont le même polynôme caractéristique. La réciproque est-elle vraie?

2. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans cette question, on suppose que A est inversible.

   (a) Montrer que AB et BA sont semblables.

   (b) D'après la question précédante, on a donc :

   $$(*) \qquad \det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n) \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Dans cette question, on souhaite montrer que la formule $(*)$ de la question précédente est vraie même lorsque A n'est pas supposée inversible. Pour cela on fixe deux matrices quelconques A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et un réel λ.

   (a) On fixe des coefficients $c_{i,j}$ et $d_{i,j}$ (pour $1 \leq i,j \leq n$). Montrer que

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{vmatrix} c_{1,1} + xd_{1,1} & c_{1,2} + xd_{1,2} & \cdots & c_{1,n} + xd_{1,n} \\ c_{2,1} + xd_{2,1} & c_{2,2} + xd_{2,2} & \cdots & c_{2,n} + xd_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} + xd_{n,1} & c_{n,2} + xd_{n,2} & \cdots & c_{n,n} + xd_{n,n} \end{vmatrix}$$

   est une fonction polynômiale de degré au plus n.

   (b) En déduire que l'application $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

   $$P(x) = \det(AB + xB - \lambda I_n) - \det(BA + xB - \lambda I_n)$$

   est une fonction polynômiale de degré au plus n. Exprimer $P(0)$ en fonction de A, B et λ.

   (c) Montrer que l'ensemble

   $$\mathcal{J} = \{x \in \mathbb{R} : A + xI_n \text{ est inversible}\}$$

   a une infinité d'éléments.

   Indication: on pourra montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : A + xI_n \text{ n'est pas inversible}\}$ a un nombre fini d'éléments.

   (d) Montrer que tout élément $x_0 \in \mathcal{J}$ est une racine de P.

   Indication: on pourra exprimer $P(x_0)$ en faisant apparaître la matrice $A + x_0 I_n$, puis on utilisera la définition de $\mathcal{J}$ et une question antérieure.

   (e) Que peut-on en déduire concernant la fonction P ?

   (f) Conclure.