Algèbre linéaire 2
Partiel du 9 novembre 2018

L2 mathématiques, épreuve d'algèbre linéaire 2 — Sujet rédigé par P.E. Chaput
Le 09/11/2018 de 10h15 à 12h15 (durée 2h) — documents et calculatrices non autorisés

Ce sujet est volontairement un peu trop long afin que les étudiants des groupes de TD différents trouvent des exercices proches de ce qu'ils ont vu en TD. Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir une bonne note. La qualité de la rédaction et la précision des arguments seront des critères pris en compte pour évaluer les copies.

Exercice 1 **2** points

Calculer $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$ en fonction des nombres réels a, b et c.

Exercice 2 **4** points

Soit Δ_n le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$. **2** points
2. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$. **2** points

Exercice 3 **3** points

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A(x)$ la matrice dont le terme général est $a_{i,j} + x$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1. **1** point
2. Pour a et b deux réels distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, on considère la matrice A suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

   Calculer $\det(A(-a))$ et $\det(A(-b))$. **1** point
3. Calculer $\det(A)$ en utilisant les deux questions précédentes. **1** point

Exercice 4 **4** points

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques (ie, telles que ${}^tA = A$) resp. antisymétriques (ie, telles que ${}^tA = -A$).

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$. **1** point

2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **1** point

3. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. **1** point

4. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(A) = {}^tA$. Calculer le déterminant de ϕ. **1** point

Exercice 5 - Vrai/faux **4** points

Pour chacun des énoncés suivant, dites s'il est vrai ou faux. S'il est vrai, donner un argument court en citant le cours. S'il est faux, donner un contre-exemple.

1. En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.

2. Si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.

3. Si A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

4. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Exercice 6 **3** points

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est diagonalisable et diagonaliser f; on indiquera la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres choisie ainsi que sa matrice inverse.

Exercice 7 **4** points

Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f? **2** points

2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il diagonalisable? **2** points