Corrigé du partiel du 09/11/2018

10 novembre 2018

Exercice 1. **2** *points* *Calculer* $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$ *en fonction des nombres réels* a, b *et* c.

On somme tout sur la première ligne. On obtient une ligne composée de $1+a+b+c$ qu'on peut extraire du déterminant, c'est-à-dire qu'on obtient

$$D = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}.$$

On retire ensuite b fois la première ligne à la seconde, et c fois la première ligne à la troisième. On obtient alors

$$D = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il reste une matrice triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale. Celle-ci est de déterminant 1 et donc $D = 1+a+b+c$.

Exercice 2. **4** *points* *Soit* Δ_n *le déterminant de taille* n *suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. *Démontrer que, pour tout* $n \geq 1$, *on a* $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$. **2** *points*
2. *En déduire la valeur de* Δ_n *pour tout* $n \geq 1$. **2** *points*

On développe suivant la première colonne. On trouve

$$\Delta_{n+2} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant est Δ_{n+1}. Pour le second, on développe par rapport à la première ligne, et on retrouve alors Δ_n (on a barré 2 lignes et 2 colonnes). Ceci nous donne la formule voulue.

On a $\Delta_1 = 3, \Delta_2 = 7$, et en utilisant la relation de récurrence on trouve $\Delta_3 = 15$. Ceci amène à conjecturer que $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$. Montrons cette formule par récurrence. Elle est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$. Supposons que $\Delta_{n-1} = 2^n - 1$ et $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$. Alors $\Delta_{n+1} = 3(2^{n+1} - 1) - 2(2^n - 1) = (3 \times 2 - 2)2^n - 1 = 2^{n+2} - 1$. La formule est donc vraie pour tout n.

Exercice 3. **3** *points* *Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A(x)$ la matrice dont le terme général est $a_{i,j} + x$.*

1. *Montrer que la fonction $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.* **1** *point*
2. *Pour a et b deux réels distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, on considère la matrice A suivante :*
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{pmatrix}.$$
Calculer $\det(A(-a))$ et $\det(A(-b))$. **1** *point*
3. *Calculer $\det(A)$ en utilisant les deux questions précédentes.* **1** *point*

Retranchons la première colonne à toutes les autres colonnes. Alors le déterminant de $A(x)$ est égal au déterminant d'une matrice dont la première colonne est constituée par des termes du type $a_{i,1} + x$ et tous les autres coefficients sont des constantes (ne dépendent pas de x). Si on développe ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve que
$$\det(A(x)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (a_{i,1} + x) \det(A_i)$$
où A_i est une matrice à coefficients réels. D'où le résultat.

De plus, $D(-a)$ est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont $\alpha_i - a$. D'où
$$D(-a) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - a).$$
De même, on a
$$D(-b) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - b).$$

D'après la question 1, on sait que $D(x) = \lambda x + \mu$ pour des réels λ et μ. λ et μ se déduisent alors facilement par la résolution d'un système 2×2 :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & \frac{D(-b) - D(-a)}{a-b} \\ \mu & = & \frac{aD(-b) - bD(-a)}{a-b}. \end{array} \right.$$

Ce qui nous intéresse est la valeur $D(0)$, soit

$$D(0) = \frac{a\prod_{i=1}^n(\alpha_i - b) - b\prod_{i=1}^n(\alpha_i - a)}{a-b}.$$

Exercice 4. 4 *points*

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques (ie, telles que ${}^tA = A$) resp. antisymétriques (ie, telles que ${}^tA = -A$).

1. *Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$.* **1** *point*
2. *Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.* **1** *point*
3. *Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.* **1** *point*
4. *Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(A) = {}^tA$. Calculer le déterminant de ϕ.* **1** *point*

1/ Si A est à la fois symétrique et antisymétrique alors $A = {}^tA = -{}^tA$, de sorte que ${}^tA = 0$ donc $A = 0$.

2/ Pour A une matrice quelconque, on a $A = \frac{1}{2}(A + {}^tA) + \frac{1}{2}(A - {}^tA)$, où $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$ est symétrique et $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ est anti-symétrique. Donc on a bien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

3/ Une base de l'espace des matrices symétriques est donnée par les $E_{i,j} + E_{j,i}$ avec $i \leq j$ ($E_{i,j}$ désigne la matrice élémentaire ayant un 1 en position (i,j)). Une base de l'espace des matrices antisymétriques est donnée par les $E_{i,j} - E_{j,i}$ avec $i < j$. Ainsi, $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = n(n+1)/2$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = n(n-1)/2$.

4/ $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la somme directe du sous-espace vectoriel des matrices symétriques et des matrices antisymétriques.

Soit $(A_1, \dots, A_p)$ et $(B_1, \dots, B_q)$ une base respective de l'espace vectoriel des matrices symétriques et antisymétriques. $(A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_q)$ forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et il suffit de calculer le déterminant dans cette base. Mais $\phi(A_i) = A_i$ tandis que $\phi(B_j) = -B_j$. On a donc $\det(\phi) = (-1)^q$. Il suffit ensuite de se souvenir que $p = \frac{n(n+1)}{2}$, ou $q = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 5. - *Vrai/faux* 4 *points* *Pour chacun des énoncés suivant, dites s'il est vrai ou faux. S'il est vrai, donner un argument court en citant le cours. S'il est faux, donner un contre-exemple.*

1. *En dimension finie, un endomorphisme admet un nombre fini de vecteurs propres.*
2. *Si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable.*
3. *Si A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.*
4. *La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.*

1/ C'est faux ! Ou un endomorphisme n'admet pas de vecteurs propres, ou il en admet une infinité. En effet, si x est vecteur propre, tous ses multiples non nuls sont vecteurs propres.

2/ C'est vrai ! Si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors $A^2 = PD^2P^{-1}$ et D^2 est diagonale.

3/ C'est faux ! Considérer par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas diagonalisable alors que son carré est la matrice nulle qui est diagonale.

4/ Sûrement pas ! Prendre par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. **3** *points*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est diagonalisable et diagonaliser f ; on indiquera la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres choisie ainsi que sa matrice inverse.

Le polynôme caractéristique de C est $\chi_C(X) = (1-X)^2(2-X)$. On trouve que (u_1, u_2) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1, avec $u_1 = (1,1,0)$ et $u_2 = (0,1,1)$ et que (u_3) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre 2, avec $u_3 = (0,0,1)$. Ainsi, C s'écrit $C = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. **4** *points* *Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1. *Quelles sont les valeurs propres de f ?* **2** *points*
2. *Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?* **2** *points*

On calcule le polynôme caractéristique de A. On a

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 2-m & m-2 & m-X \end{vmatrix} =_{C_1+C_2\to C_1} \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 1-X & 2-X & 1 \\ 0 & m-2 & m-X \end{vmatrix} \\
&=_{L_2-L_1\to L_2} \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & m-2 & m-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 2-X & 0 \\ m-2 & m-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)(2-X)(m-X).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont donc 1,2 et m. En particulier, si $m = 1$ ou 2, f n'admet que deux valeurs propres.

Si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui admet trois valeurs propres distinctes : f est donc diagonalisable. Si $m = 1$, le polynôme caractéristique de f est $(1-X)^2(2-X)$. f est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est égale à 2. Cherchons ce sous-espace (rappelons qu'on a $m=1$). Pour $u=(x,y,z)$, on a

$$f(u)=u \iff \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ -x+y+z & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & x \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

Une base de $\ker(f-I)$ est donc donnée par le vecteur $(1,1,0)$. L'espace est de dimension $1\neq 2$: la matrice n'est pas diagonalisable.

Supposons maintenant $m=2$. On doit chercher cette fois la dimension de $\ker(f-2I)$. On a, pour $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=2u \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+z & = & 0 \\ -x+z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & y \\ z & = & x \end{array}\right.$$

Une base de $\ker(f-2I)$ est donnée par la famille des deux vecteurs $(1,0,1)$ et $(0,1,0)$. En particulier, $\ker(f-2I)$ est de dimension 2 et f est diagonalisable.