Algèbre linéaire 2
Examen du 15/01/2019

L2 mathématiques, épreuve d'algèbre linéaire 2
Le 15/01/2019 de 13h30 à 16h30 (durée 3h)

Sujet rédigé par P.E. Chaput
documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A puis calculer A^n en fonction de n.
2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes :
$$\begin{cases} u_{n+1} & = & -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} & = & 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} & = & 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$
pour $n \geq 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de u_0, v_0, w_0 et n.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des couples de fonctions $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - 4y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

Exercice 3. On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, et un endomorphisme $f : E \to E$. On suppose que f est nilpotent, soit qu'il existe m tel que $f^m = 0$, et que $\dim \ker f = 1$.

1. Enoncer la définition de l'indice d'un endomorphisme en général et dans le cas d'un endomorphisme nilpotent. On notera par la suite i l'indice de f et k un entier quelconque.
2. On suppose que $n = 2$. Donner un exemple d'endomorphisme f vérifiant ces conditions.
3. On suppose que $n = 3$. Donner un exemple d'endomorphisme f vérifiant ces conditions.
4. Supposons $k \geq i$. Quelle est la valeur de $\dim \ker f^k$?
5. On suppose dans les questions suivantes que $0 \leq k < i$. On pose $g = f_{|\ker f^{k+1}}$. Montrer que $\mathrm{Im}\ \ g \subset \ker f^k$.
6. En utilisant la question précédente montrer que $\dim \ker f^{k+1} \leq \dim \ker f^k + 1$. Puis justifier qu'on a en fait l'égalité $\dim \ker f^{k+1} = \dim \ker f^k + 1$.
7. Montrer que $i = n$.
8. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que les coefficients $a_{i,j}$ de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ vérifient
$$\begin{cases} a_{i,i+1} = 1 \\ a_{i,j} = 0 \text{ si } j \neq i + 1 \end{cases}$$
(on pourra choisir comme n-ième vecteur de $\mathcal{B}$ un vecteur e_n tel que $f^{n-1}(e_n) \neq 0$).

En conclusion, cet exercice montre qu'un endomorphisme nilpotent dont le noyau est de dimension 1 est d'indice de nilpotence n.

Exercice 4. Dans cet exercice, on montre que les éléments de la décomposition de Dunford-Jordan d'un endomorphisme f sont des polynômes en f. Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Calculer le produit $(1-X)(1+X+\cdots+X^{k-1})$ dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\nu : F \to F$ un endomorphisme tel que $\nu^k = 0$. On note I le morphisme identité de F ($I = Id_F$). Montrer que $I - \nu$ est inversible et qu'il existe un polynôme $S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(I-\nu)^{-1} = S(\nu)$.
3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E = F \oplus G$ une décomposition de E. On note $p_F : E \to F$ la projection sur F parallèlement à G. Supposons qu'on a un endomorphisme $g : E \to E$ tel que
$$(*) \quad \begin{cases} \operatorname{Im} g \subset F \\ G \subset \ker g \\ (p_F - g)^k = 0 \end{cases}$$
On pose $\nu = p_F - g$ et $\mu = Id_E - g$
   a) Montrer que $p_F \circ \nu = \nu \circ p_F = \nu$ et que $\nu \circ \mu = \mu \circ \nu = \nu^2$.
   b) Montrer que $(p_F - \nu)(p_F + \nu + \nu^2 + \cdots + \nu^{k-1}) = p_F$.
   c) Montrer que $(p_F - \nu)(Id_E + \mu + \mu^2 + \cdots + \mu^{k-1}) = p_F$.
   d) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(0) = 0$ et $Q(g) = p_F$.
4. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé. On note
$$\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}.$$
Rappeler la définition de l'espace caractéristique C_{λ_i} associé à la valeur propre λ_i et la propriété de ces espaces vue en cours.
5. On choisit $i \in \{1, \ldots, r\}$ et on note $F = C_{\lambda_i}$ et $G = \bigoplus_{j \neq i} C_{\lambda_j}$.
   a) Montrer qu'il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $R(0) = 0$ et
$$\prod_{j \neq i} ((\lambda_i - \lambda_j) + X)^{\alpha_j} = \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)^{\alpha_j} + R(X).$$
   b) Soit $S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $S(0) = 0$ et $\nu : F \to F$ tel que $\nu^k = 0$. Montrer que $S(\nu)^k = 0$.
   c) Soit
$$P_i = \prod_{j \neq i} \frac{(X - \lambda_j)^{\alpha_j}}{(\lambda_i - \lambda_j)^{\alpha_j}}.$$
   Montrer que $P_i(f)$ vérifie les conditions $(*)$ avec $k = \alpha_i$.
6. On note $(p_i)_{1 \leq i \leq r}$ la famille de projecteurs associée à la décomposition $E = \bigoplus_i E_{\lambda_i}$. Déduire des questions précédantes qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $P(f) = \sum_i \lambda_i p_i$.
7. Rappeler le théorème de décomposition de Dunford-Jordan.
8. Pour $f = d + \nu$ la décomposition de Dunford-Jordan de f, montrer qu'il existe $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(0) = Q(0) = 0$, $P(f) = d$, et $Q(f) = \nu$.