Université de Lorraine **Faculté des Sciences et Technologies**

Partiel – "Arithmétique" – 1er mars 2019

Durée : 2h. Tous documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques interdits.

Avertissement :

- Les résultats seront clairement et rigoureusement justifiés.
- Le soin, la clarté et la concision sont des qualités appréciées.

Exercice 1

(i) *(Question de cours)* Donner l'énoncé du *Théorème fondamental de l'arithmétique.*

(ii) *(Question de cours)* Montrer *l'existence* de la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers (pas l'unicité).

(iii) Quelles sont les décompositions en produit de facteurs premiers de $n_1 = 24$ et de $n_2 = 23$?

Exercice 2

Le but de cet exercice est de déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$40x + 64y = 56.$$

(i) Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver $d = \text{pgcd}(40, 64)$.

(ii) Est-ce que 56 est divisible par d ? Quelle conclusion en tirez-vous ?

(iii) En remontant l'algorithme d'Euclide trouver u et v tels que $40u + 64v = d$.

(iv) À partir de ce qui précède, donner un couple $(u', v') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $40u' + 64v' = 56$.

(v) Répondre à la question initiale : donner tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $40x + 64y = 56$.

(vi) Quel est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $40x + 64y = 60$? Justifier.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que la *somme* S des trois cubes n^3, $(n + 1)^3$ et $(n + 2)^3$ est donné par

$$S = 3n(n^2 + 5) + 9(n^2 + 1).$$

(ii) Montrer que $3n(n^2 + 5)$ est divisible par 9 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iii) En tirer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours un multiple de 9.

Tournez la page svp (sujet en recto-verso)!

Exercice 4

(i) *(Question de cours)* Définir les *éléments inversibles* de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
(ii) Est-ce que 3 est un élément inversible modulo 8 ? Justifier votre réponse.
(iii) Donner tous les éléments inversibles modulo 8.

Exercice 5

Soient $b, c \in \mathbb{N}$ tels que $\operatorname{pgcd}(b, c) = 1$. Soit $m \geq 1$ un diviseur de b.

(i) Donner la relation de Bézout pour b et c.
(ii) En utilisant la propriété de m et (i), montrer que

$$\operatorname{pgcd}(m, c) = 1.$$

Justifier en détail.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$ et posons

$$N = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

(i) Montrer que N est un entier.
(ii) $(*)$ Montrer que N est un entier pair.