Université de Lorraine **Faculté des Sciences et Technologies**

Examen – "Arithmétique" – 24 mai 2019

Durée : 2h. Tous documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques interdits.

Avertissement :

- Les résultats seront clairement et rigoureusement justifiés.
- Le soin, la clarté et la concision sont des qualités appréciées.

Exercice 1 *(Questions de cours)*

(i) Donner l'énoncé du Théorème d'Alembert-Gauss (Théorème fondamental d'algèbre).
(ii) Montrer qu'un polynôme P est irréductible dans $\mathbb{C}[X]$ si et seulement si $\deg P = 1$.
(iii) Donner un exemple d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg P > 1$ qui est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Justifier.

Exercice 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et posons $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ avec

$$P = X^4 + aX^2 + bX + 2 \quad \text{et} \quad Q = X^2 + X + 1.$$

(i) Effectuer une division euclidienne de P par Q.
(ii) Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles P est divisible par Q.

Exercice 3

Soient

$$P = X^6 - X^4 - X^2 + 1 \quad \text{et} \quad Q = X^4 + 2X^3 - 2X - 1.$$

(i) Montrer que $\mathrm{pgcd}(P, Q) = X^3 + X^2 - X - 1$.
(ii) Posons $T = X^3 + X^2 - X - 1$. Montrer que -1 est une racine double de T.
(iii) Donner la factorisation de T dans $\mathbb{C}[X]$.
(iv) En déduire les racines communes de P et Q ainsi que leur multiplicité pour chacun des polynômes séparément.

Tournez la page svp (sujet en recto-verso)!

Exercice 4

Soient A et B deux polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $\mathrm{pgcd}(A, B) = 1$.

(i) Rappeler la relation de Bézout pour A et B.

(ii) Montrer que $\mathrm{pgcd}(A - B, A) = 1$ et $\mathrm{pgcd}(A - B, B) = 1$.

(iii) En déduire (avec justification) que $\mathrm{pgcd}(A - B, AB) = 1$.

Exercice 5

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $XP(X - 1) = (X - 2)P(X)$.

(i) Montrer que 0 et 1 sont racines de P.

(ii) Soit a une racine de P. Si $a \neq 0$, montrer que $a - 1$ est racine. Si $a \neq 1$, montrer que $a + 1$ est racine.

(iii) On suppose que P n'est pas le polynôme nul. Montrer que 0 et 1 sont les seules racines de P.
(*Indication:* S'il existe une racine a telle que $\mathrm{Re}(a) < 1$ différente de 0 ($a \neq 0$), montrer qu'il y a une infinité de racines. S'il existe une racine a telle que $\mathrm{Re}(a) > 0$ différente de 1 ($a \neq 1$), montrer qu'il y a une infinité de racines.)

(iv) En déduire que P est de la forme $\alpha X^k (X - 1)^\ell$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $\ell \in \mathbb{N}^*$.

(v) Quel est l'ensemble des polynômes $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$XP(X - 1) = (X - 2)P(X) \ ?$$