

Calculs et Mathématiques Épreuve du 22 Novembre 2019

Documents et calculatrices interdits.

Durée 2h.

Encadrer les résultats. Le manque de soin sera pénalisé. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (3 points)

1. Calculer $\sin(19\pi/6)$ et $\cos(-23\pi/3)$.

2. Résoudre les équations suivantes :

a) $2 \cos(x) = \sqrt{3}$,

b) $2 \cos(2x) = \sqrt{3}$.

Exercice 2. (4 points)

1. Déterminer le domaine de définition, puis calculer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{1-3x}\right).$$

2. Déterminer le domaine de définition, puis calculer la dérivée de la fonction g définie par :

$$g(x) = \ln(f(x)).$$

Exercice 3. (3 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

2. Montrer que la courbe \mathcal{C}_f admet en $+\infty$ une asymptote dont on déterminera une équation.

3. Montrer que la courbe \mathcal{C}_f admet en $-\infty$ une asymptote dont on déterminera une équation.

Exercice 4. (6 points)

Déterminer les primitives suivantes :

a) $\int \tan(x)dx$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ b) $\int \cos(x) \sin^3(x)dx$ c) $\int \frac{dx}{x \ln^3(x)}$ sur $]0; +\infty[$

d) $\int (x^2 + 1)e^{-x}dx$ e) $\int \cos(2x)e^{-x}dx$

Exercice 5. (4 points)

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + \frac{1}{(x-1)}y(x) = \frac{\ln(x)}{(x-1)}, \quad \forall x \in]1, \infty[.$$

2. Déterminer les solutions de cette équation vérifiant de plus $y(e) = 0$.