

---

**Calculs et Mathématiques**  
**Épreuve du 22 Novembre 2019**

---

Documents et calculatrices interdits.

Durée 2h.

Encadrer les résultats. Le manque de soin sera pénalisé. Le barème est indicatif.

---

**Exercice 1.** (3 points)

1. Calculer  $\sin(19\pi/6)$  et  $\cos(-23\pi/3)$ .

2. Résoudre les équations suivantes :

a)  $2\cos(x) = \sqrt{3}$ ,

b)  $2\cos(2x) = \sqrt{3}$ .

**Exercice 2.** (4 points)

1. Déterminer le domaine de définition, puis calculer la dérivée de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{1-3x}\right).$$

2. Déterminer le domaine de définition, puis calculer la dérivée de la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = \ln(f(x)).$$

**Exercice 3.** (3 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ . On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ .

2. Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet en  $+\infty$  une asymptote dont on déterminera une équation.

3. Montrer que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet en  $-\infty$  une asymptote dont on déterminera une équation.

**Exercice 4.** (6 points)

Déterminer les primitives suivantes :

a)  $\int \tan(x) dx$  sur  $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

b)  $\int \cos(x) \sin^3(x) dx$

c)  $\int \frac{dx}{x \ln^3(x)}$  sur  $]0; +\infty[$

d)  $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx$

e)  $\int \cos(2x)e^{-x} dx$

**Exercice 5.** (4 points)

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) + \frac{1}{(x-1)}y(x) = \frac{\ln(x)}{(x-1)}, \quad \forall x \in ]1, \infty[.$$

2. Déterminer les solutions de cette équation vérifiant de plus  $y(e) = 0$ .