Université de Lorraine — Faculté des Sciences et Technologies
Semestre 1 M-I, M-P — Automne 2018

Calculs et Mathématiques
Épreuve du 14 Janvier 2019

Documents et calculatrices interdits. Durée 3h.
Encadrer les résultats. Le manque de soin sera pénalisé. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (5 points)
Pour chacune des questions une seule des quatre affirmations A, B, C et D est vraie. Déterminer celle qui est vraie. Aucune justification n'est demandée.
Toute réponse juste est comptée $+0.5$ point, toute réponse fausse est comptée -0.25 point et une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.
Pour répondre, vous devez utiliser **impérativement le tableau fourni page 3**.

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} - x + 1$. L'image de $\ln(2)$ par la fonction f est :
$$A\ :\ \frac{1}{2} - \ln(3) \quad B\ :\ -1 - \ln(2) \quad C\ :\ \frac{3}{2} - \ln(2) \quad D\ :\ 3 - \ln(2)$$
2. Pour tous réels a et b strictement positifs, le nombre réel $e^{-\ln a} + e^{\ln b}$ est égal à :
$$A\ :\ b - a \quad B\ :\ \frac{ab+1}{a} \quad C\ :\ \frac{b}{a} \quad D\ :\ -ab$$
3. Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x-1}{\ln(x-1)}$ est :
$$A\ :\ ]0,+\infty[\quad B\ :\ ]1,2[\cup]2,+\infty[\quad C\ :\ ]1,+\infty[\quad D\ :\ ]0,1[\cup]1,+\infty[$$
4. La limite $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ est égale à :
$$A\ :\ 0 \quad B\ :\ +\infty \quad C\ :\ 1 \quad D\ :\ \frac{1}{6}$$
5. La fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = (x-3)\ln(x)$ est :
A : positive sur $]0;+\infty[$ B : négative sur $]0;1]$ C : négative sur $]0;+\infty[$ D : positive sur $[3;+\infty[$
6. La dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{e^{3x}}$ est la fonction :
$$A\ :\ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{e^{3x}}} \quad B\ :\ x \mapsto \frac{3}{2}e^{\frac{3x}{2}} \quad C\ :\ x \mapsto \sqrt{e^{3x}} \quad D\ :\ x \mapsto \frac{3}{2\sqrt{e^{3x}}}$$
7. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto xe^x$ est la fonction ;
$$A\ :\ x \mapsto (x-1)e^x \quad B\ :\ x \mapsto xe^x \quad C\ :\ x \mapsto (x+1)e^x \quad D\ :\ x \mapsto \frac{x^2}{2}e^x$$
8. Le nombre réel $\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{x}{2}}dx$ est égal à :
$$A\ :\ 2(\sqrt{e}-1) \quad B\ :\ \frac{e-1}{2} \quad C\ :\ \frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}}-1) \quad D\ :\ e^{\frac{1}{2}}-1$$
9. Les solutions de l'équation différentielle $y'(x) + 2y(x) = 0$ sont les fonctions :
$$A\ :\ x \mapsto ke^{2x} \quad B\ :\ x \mapsto ke^{\frac{x}{2}} \quad C\ :\ x \mapsto ke^{-2x} \quad D\ :\ x \mapsto ke^{-\frac{x}{2}}$$
10. Une solution particulière de l'équation différentielle $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = xe^{3x}$ est :
$$A:\ x \mapsto x(x/2-1)e^{2x} \quad B:\ x \mapsto x(x/2-1)e^{3x} \quad C:\ x \mapsto (x^2-x)e^{2x} \quad D:\ x \mapsto 3e^{3x}$$

Exercice 2. (2 points)
Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x & + & 2y & - & z & + & t & = & 2 \\ 3x & - & y & - & 2z & + & t & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & - & t & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & -1 \end{cases}$$

Exercice 3. (2 points)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0.$$

Exercice 4. (6 points)
Déterminer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int x^2 e^{2x} dx$, sur $\mathbb{R}$;

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$, sur $\mathbb{R}$;

c) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} dx$, sur $]1;+\infty[$ (poser $x = \mathrm{ch}(t)$) ;

d) $\displaystyle\int \frac{\tan(x)}{\cos(x)+2} dx$, sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ (poser $t = \cos(x)$) ;

Exercice 5. (2 points)
Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(x^2+1)y'(x) + xy(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6. (2 points)
Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$4y"(x) - 4y'(x) + y(x) = \exp(x/2), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7. (4 points)
L'objectif de cet exercice est de calculer les trois intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))dx, \quad J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx, \quad K = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x} dx.$$

1. À l'aide du changement de variable $x = \frac{\pi}{4} - t$, montrer que $I = \frac{\pi}{8}\ln(2)$.
   (indication : on pourra utiliser la formule trigonométrique $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$*)*
2. En effectuant le changement de variable $x = \tan(t)$ dans J, montrer que $J = I$.
3. Déterminer K en effectuant une intégration par parties.

Exercice 8. (5 points)
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

1. (a) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x + \sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{-x+\sqrt{x^2+1}}$.
   (b) En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x + \sqrt{x^2+1} > 0$, puis le domaine de définition de f.
   (c) À l'aide des deux questions précédentes, montrer que la fonction f est impaire.
2. Déterminer le domaine d'étude de la fonction f, puis effectuer son étude complète et tracer sa courbe représentative.
3. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que sa bijection réciproque est la fonction sinus hyperbolique.

QCM Calculs et Mathématiques

Nom :
Prénom :
Numéro de groupe :

Pour éviter la fraude, l'ordre des questions dans le tableau est différent suivant les énoncés. Il est donc inutile de regarder sur le sujet du voisin et surtout prenez bien garde de bien répondre sur la bonne ligne !

Questions	Réponses			
	A	B	C	D
Question 1				
Question 2				
Question 3				
Question 4				
Question 5				
Question 6				
Question 7				
Question 8				
Question 9				
Question 10				

V1