

Calcul et Mathématiques

Épreuve du 23 Novembre 2018

Documents et calculatrices interdits.

Durée 2h.

Encadrer les résultats. Le manque de soin sera pénalisé. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (4 points)

1. Calculer $\cos(19\pi/6)$ et $\sin(-23\pi/4)$.

2. Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin(x) = \sqrt{2}$

b) $2\sin(x) = \sqrt{2}$

c) $2\sin(2x) = \sqrt{2}$

d) $\sin(2x) + \cos(x) = 0$.

Exercice 2. (5 points)

Déterminer les primitives suivantes :

a) $\int \tan(x)dx$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

b) $\int \sin(x)\cos^4(x)dx$

c) $\int x^2 e^{2x}dx$

d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx$

Exercice 3. (4 points)

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'(x) - \frac{1}{2x}y(x) = \sqrt{x}\ln(x), \quad \forall x \in]0, \infty[.$$

2. Déterminer les solutions de cette équation vérifiant de plus $y(1) = 0$.

Exercice 4. (5 points)

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes définies sur \mathbb{R} :

a) $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0$,

b) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$,

c) $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 0$,

d) $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = e^{-3x}$,

e) $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \cos(x)$,

f) $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \cos(x) + e^{-3x}$.

Exercice 5. (7 points)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{4}x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

2. Montrer que la fonction f est impaire. Qu'en déduire pour sa courbe représentative \mathcal{C}_f ?

3. Montrer que \mathcal{C}_f admet en $+\infty$ une droite asymptote oblique Δ dont on déterminera une équation.

4. Étudier les variations de la fonction f .

5. Tracer la courbe représentative \mathcal{C}_f dans un repère orthonormé (rappel $\ln(2) \approx 0.69$).

6. Déterminer les points de \mathcal{C}_f en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $5x+12y=0$.